TUGAS AKHIR - SM141501

ENUMERASI GRAF SEDERHANA DENGAN ENAM SIMPUL TIDAK ISOMORFIS MENGGUNAKAN TEOREMA POLYA

AHMAD JAMIL
NRP 1211 100 039

Dosen Pembimbing:
Soleha, S.Si, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

FINAL PROJECT - SM141501

ENUMERATION OF NON ISOMORPHIC SIMPLE GRAPH WITH SIX VERTICES USING POLYA'S THEOREM

AHMAD JAMIL
NRP 1211 100 039

Supervisor:
Soleha, S.Si, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

”Halaman ini sengaja dikosongkan.”

LEMBAR PENGESAHAN

ENUMERASI GRAF SEDERHANA DENGAN ENAM SIMPUL TIDAK ISOMORFIS MENGGUNAKAN TEOREMA POLYA

ENUMERATION OF NON ISOMORPHIC SIMPLE GRAPH WITH SIX VERTICES USING POLYA'S THEOREM

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Analisis dan Aljabar
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
AHMAD JAMIL
NRP. 1211 100 039

Menyetujui,
Dosen Pembimbing

Soleha, S.Si, M.Si
NIP. 19830107 200604 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Surabaya, Juli 2015

ENUMERATION OF NON ISOMORPHIC SIMPLE GRAPH WITH SIX VERTICES USING POLYA'S THEOREM

Name	:	Ahmad Jamil
NRP	:	1211 100 039
Department	:	Mathematics FMIPA-ITS
Supervisor	:	Soleha, S.Si, M.Si

Abstract

One of the problems which often occur in Mathematics is enumeration or object enumeration from the arrangement. As it is known from some problems of Mathematics which is complicated related to the problem of enumeration. It happens due to conceptual problem in which when different object can be viewed isomorphic. Besides permutation group, the solution of enumeration problem also involve Polya's Theorem I and Polya's Theorem II. Polya's Theorem I is used to determine how many objects which are not isomorphic. For the last few years, the research was conducted related to enumeration problem on simple graph. For more detail, problem dealing with how to get many simple graf with four (five) vertices which are not isomorphic by using concept of symetry group $S_4(S_5)$, *Polya's Theorem I and Polya's Theorem II so that it reaches 11 and 35 simple graphs which are not isomorphic each other. In this final project, it is gotten simple graph that there are six vertices which are not isomorphic using Polya's Theorem so that it is gotten 156 simple graphs which are not isomorphic.*

Keywords: *Simple Graph, Permutation Group, Enumeration, Isomorphic, Polya's Theorem.*

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

ENUMERASI GRAF SEDERHANA DENGAN ENAM SIMPUL TIDAK ISOMORFIS MENGGUNAKAN TEOREMA POLYA

Nama Mahasiswa	:	Ahmad Jamil
NRP	:	1211 100 039
Jurusan	:	Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	:	Soleha, S.Si, M.Si

Abstrak

Salah satu dari masalah yang sering muncul dalam matematika adalah masalah enumerasi atau pencacahan objek dari suatu pengaturan. Seperti diketahui, dari beberapa permasalahan matematika yang rumit terkait pada masalah enumerasi tersebut. Hal ini lebih dikarenakan permasalahan konspetual yaitu ketika objek berbeda dapat dipandang sama (isomorfis). Selain grup permutasi, penyelesaian permasalahan enumerasi juga melibatkan Teorema Polya I dan Teorema Polya II. Teorema Polya I digunakan untuk menentukan banyaknya objek yang tidak isomorfis sedangkan Teorema Polya II digunakan untuk menentukan bentuk-bentuk objek yang tidak isomorfis tersebut. Beberapa tahun terakhir dilakukan penelitian terkait permasalahan enumerasi pada graf sederhana. Lebih detailnya, permasalahan mengenai bagaimana mendapatkan banyaknya graf sederhana dengan empat (lima) simpul yang tidak isomorfis menggunakan konsep grup simetri $S_4(S_5)$*, Teorema Polya I serta Teorema Polya II sehingga diperoleh hasil 11 dan 35 graf sederhana yang tidak saling isomorfis. Pada Tugas Akhir ini diselidiki mendapatkan banyaknya graf sederhana dengan enam simpul yang tidak isomorfis menggunakan Teorema Polya sehingga diperoleh hasil 156 graf sederhana yang tidak saling isomorfis.*

Kata-kunci: *Graf Sederhana, Grup Permutasi, Enumerasi, Isomorfis, Teorema Polya.*

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillaahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, petunjuk serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"ENUMERASI GRAF SEDERHANA DENGAN ENAM SIMPUL TIDAK ISOMORFIS MENGGUNAKAN Teorema POLYA"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Orang tua, serta keluarga terdekat yang selalu mendoakan dan memeberikan motivasi.

2. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan bimbingan selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.

3. Ibu Soleha, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

4. Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp, Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si, Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si, dan Ibu Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tugas Akhir ini.

5. Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp. selaku koordinator Tugas Akhir dan Mas Ali.

6. Bapak Drs. Daryono Budi Utomo selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.

7. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

8. Seluruh pihak yang terkait yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang secara tidak langsung telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

Penulis juga menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, 22 Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

DAFTAR GAMBAR

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

Daftar Simbol

$(G, *)$	Grup dengan operasi biner $*$
$\in$	Elemen
e	Identitas
S_n	Grup Simetri berderajat n
D_n	Grup Dihedral berderajat n
$\mathbb{Z}$	Grup bilangan bulat
$\mathbb{Z}_n$	Grup bilangan bulat modulo n
$\mathbb{Q}$	Grup bilangan rasional
$\mathbb{R}$	Grup bilangan real
$\mathbb{C}$	Grup bilangan kompleks
$F(g)$	Titik tetap dari permutasi g
$\|G\|$	Orde dari grup G
Gx	Orbit dari x
G_x	Penstabil dari x
$[a_1, a_2, ..., a_n]$	Tipe permutasi
$z(g; x_1, x_2, ..., x_n)$	Indeks sikel dari permutasi g
$z(G; x_1, x_2, ..., x_n)$	Indeks sikel dari grup G

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatarbelakangi permasalahan, kemudian dibuat inti dari permasalahan tersebut dalam bentuk rumusan masalah disertai batasan masalah. Terdapat pula tujuan serta manfaat dari penulisan Tugas Akhir ini serta gambaran besar penulisan di setiap bab buku ini bisa dilihat pada sistematika penulisan.

1.1 Latar Belakang

Salah satu cabang dari ilmu aljabar adalah aljabar abstrak dan salah satu bidang yang dipelajari dalam ilmu aljabar abstrak adalah grup. Grup merupakan ilmu yang dikembangkan berdasarkan empat bidang utama yaitu aljabar klasik yang dikembangkan oleh J.L. Lagrange pada tahun 1770, teori bilangan yang dikembangkan oleh C.F Gauss pada tahun 1801, geometri yang dikembangkan oleh F.Klein pada tahun 1872 dan analisis yang dikembangkan oleh S.Lie pada tahun 1874 serta H.Pointcare dan F.Klein pada tahun 1876 [1]. Salah satu dari bentuk grup adalah grup permutasi. Grup permutasi merupakan pengembangan dari aljabar klasik. Grup permutasi adalah sebuah grup yang elemen-elemennya merupakan permutasi dari suatu himpunan dengan operasi komposisi. Salah satu contoh dari grup permutasi adalah grup simetri. Banyak sekali aplikasi grup permutasi dibidang matematika selain aljabar yaitu aplikasi dibidang analisis, geometri, kombinatorik [2] dan bidang lain yaitu kimia [3], fisika [4] maupun musik [5].

Salah satu penggunaan konsep grup permutasi berhubungan dengan penyelesaian permasalahan enumerasi. Enumerasi dalam hal ini adalah penghitungan atau pencacahan dari suatu pengaturan [3]. Seperti diketahui, dari beberapa permasalahan matematika yang rumit terkait pada enumerasi tersebut. Hal ini lebih dikarenakan permasalahan konspetual yaitu ketika objek berbeda dapat dipandang sama (isomorfis). Salah satu penyelesaian masalah enumerasi adalah dengan menggunakan Teorema Polya.

Graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika diskrit. Graf adalah pasangan himpunan yang terdiri dari himpunan titik yang tak kosong dan himpunan garis yang mungkin kosong atau himpunan berhingga pasangan tak terurut dari elemen-elemen pada himpunan titik-titiknya. Graf sederhana adalah graf yang tidak memilki sisi ganda dan loop. Graf sederhana $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dikatakan isomorfis jika terdapat fungsi bijektif $f : V_1 \to V_2$ dengan sifat $a, b \in V_1$ bertetangga jika dan hanya jika $f(a), f(b) \in V_2$ bertetangga,untuk setiap $a, b \in V_1$. Masalah enumerasi pada graf yang tidak isomorfis merupakan masalah yang tidak mudah karena harus bisa menemukan satu per satu graf yang tidak isomorfis dan menentukan bentuk dari graf yang tidak isomorfis tersebut. Teorema Polya I menjelaskan banyaknya graf yang tidak isomorfis dan Teorema Polya II menjelaskan bentuk-bentuk graf yang tidak isomorfis tersebut.

Salah satu penerapan grup simetri S_4 yaitu grup simetri dengan 24 anggota. Pada penelitian sebelumnya, digunakan konsep grup simetri S_4 untuk menyelesaikan permasalahan enumerasi molekul tetrahedron. Molekul tetrahedron memiliki empat sudut dengan satu atom karbon (C) dan lengannya diikat oleh empat atom yang berbeda yaitu H, CH_3, Cl dan C_2H_5. Dari hasil enumerasi diperoleh 35 molekul tetrahedron yang tidak isomorfis [3]. Permasalahan pada [3] di atas dapat dianalogikan dengan permasalahan pewarnaan pada graf persegi dengan empat warna.

Dalam penelitian yang lain, Teorema Polya dapat digunakan dalam menentukan graf sederhana dengan empat simpul yang tidak saling isomorfis [6] dan lima simpul yang tidak saling isomorfis [7]. Oleh sebab itu, penelitian Tugas Akhir ini melanjutkan penentuan banyaknya graf sederhana dengan enam simpul yang tidak saling isomorfis. Pada dasarnya Tugas Akhir ini merupakan penggabungan dari ilmu graf dan teori grup. Teori grup yang digunakan adalah teori grup permutasi dan grup *Action*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan tersebut rumusan masalah pada Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana cara menentukan banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis dengan enam simpul ?
2. Bagaimana mendapatkan bentuk-bentuk dari graf sederhana yang tidak saling isomorfis dengan enam simpul ?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada Tugas Akhir ini adalah Penghitungan untuk penentuan bentuk graf yang tidak saling isomorfis menggunakan software Maxima.

1.4 Tujuan

Tujuan pada Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Menghitung banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis dengan enam simpul menggunakan Teorema Polya I.

2. Mengetahui bentuk-bentuk graf sederhana yang tidak saling isomorfis dengan enam simpul menggunakan Teorema Polya II.

1.5 Manfaat

Manfaat yang dapat diperoleh dari Tugas Akhir ini adalah memberikan informasi bagi pihak yang ingin mengembangkan dan melakukan penelitian tentang enumerasi graf yang tidak saling isomorfis.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN
   Pada bab ini terdapat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Pada bab ini diuraikan mengenai grup, subgrup, Teorema Burnside, Indeks sikel, dan graf sederhana.

3. BAB III METODE PENELITIAN
   Pada bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir.

4. BAB IV PEMBAHASAN
   Pada bab ini dibahas tentang Teorema Burnside dan Teorema polya disertai dengan pembuktiannya. Pembahasan ini dimulai dengan Penjelasan Teorema Burnside dan Teorema Polya. Kemudian akan dibahas mengenai Graf sederhana dengan enam simpul lalu dibahas tentang pola-pola yang tidak isomorfis. Setelah itu dilakukan enumerasi graf sederhana dengan enam simpul dengan menggunakan Teorema Polya I dan Teorema Polya II.

5. BAB V PENUTUP
   Pada bab ini diuraikan kesimpulan dari Tugas Akhir ini dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

   LAMPIRAN

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai grup, subgrup, Teorema Burnside, Indeks sikel, dan Teori graf sederhana.

2.1 Grup

Salah satu cabang dari ilmu aljabar yang berhubungan dengan permutasi adalah grup.

Definisi 2.1.1. [8] *Himpunan $G \neq \emptyset$ dengan satu operasi biner $*$ disebut Grup $\langle G, * \rangle$, jika memenuhi:*

(G1) $\forall x, y \in G, x * y \in G$

(G2) $\exists e \in G$ *sehingga* $x * e = e * x = x, \forall x \in G$

(G3) $\forall x \in G, \exists x^{-1} \in G$ *sehingga* $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

(G4) $\forall x, y, z \in G, x * (y * z) = (x * y) * z.$

Contoh 2.1.2. Himpunan $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}$ merupakan grup terhadap operasi biner penjumlahan.

Definisi untuk grup G yang memiliki sejumlah berhingga anggota sebagai berikut:

Definisi 2.1.3. [8] *Grup G disebut grup berhingga jika memiliki sejumlah berhingga anggota. Banyaknya anggota dalam grup G disebut orde G dan disimbolkan dengan $|G|$.*

Contoh 2.1.4. Grup $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ merupakan grup dengan operasi biner penjumlahan dan $|\mathbb{Z}_7| = 7$.

Contoh grup yang akan banyak digunakan dalam pembahasan Tugas Akhir ini adalah grup permutasi yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1.5. [8] *Jika $A \neq \emptyset$, untuk setiap fungsi $f : A \to A$ dan f bijektif maka f disebut permutasi dari A.*

Contoh 2.1.6. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $f : A \to A$ yang memenuhi $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1$ dan $f(4) = 4$, maka f adalah permutasi dari A dan ditulis

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.1.7. [8] *Misalkan $f_1 \circ f_2$ permutasi dari A, Maka hasil kali $f_1 f_2$ dari f_1 dan f_2 didefinisikan sebagai pemetaan komposisi $f_1 \circ f_2$, $\forall a \in A$ diperoleh*

$$(f_1 f_2)(a) = (f_1 \circ f_2)(a) = f_1(f_2(a))$$

Contoh 2.1.8. Misalkan

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (f_1 f_2)(1) &= f_1(f_2(1)) = f_1(1) = 2 \\ (f_1 f_2)(1) &= f_1(f_2(2)) = f_1(2) = 3 \\ (f_1 f_2)(1) &= f_1(f_2(3)) = f_1(4) = 1 \\ (f_1 f_2)(1) &= f_1(f_2(4)) = f_1(3) = 4 \\ f_1 f_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa hasil kali permutasi-permutasi dibaca dari kanan ke kiri.

Definisi 2.1.9. [9] *Permutasi-permutasi dapat dihimpunkan menjadi suatu grup dengan operasi komposisi yang dinamakan grup permutasi.*

Contoh 2.1.10.

$$H = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \textit{ sebagai elemen identitas}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \textit{ dan } f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_3$$

Jika terdapat $f : A \rightarrow A$ suatu permutasi, maka semua permutasi yang mungkin tersebut membentuk suatu grup permutasi. Grup tersebut dinamakan grup simetri dan dinotasikan dengan S_n

Teorema 2.1.11. [9] *Jika A suatu himpunan, maka himpunan yang memuat semua permutasi dari A dinamakan grup simetri membentuk suatu grup simetri.*

Contoh 2.1.12. Misalkan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ maka,
$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Definisi 2.1.13. [8] *Jika terdapat bilangan positif m sedemikian hingga $x, f(x), f^2(x), ..., f^{m-1}(x)$ semuanya berbeda dan $f^m(x) = x$, maka $(x\ f(x)\ f^2(x)...\ f^{m-1}(x))$ adalah sikel dengan panjang m.*

Contoh 2.1.14. Permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ dapat dinyatakan dalam notasi indeks sikel (1 2 3) dan sikel tersebut merupakan sikel dengan panjang 3.

Berikut ini adalah bentuk khusus dari sikel yang dinamakan transposisi.

Definisi 2.1.15. [8] *Transposisi adalah sikel dengan panjang dua.*

Contoh 2.1.16. $(1\ 3) \in S_3$ merupakan sebuah transposisi karena sikel tersebut adalah sikel dengan panjang 2.

2.2 Subgrup

Banyak sekali himpunan bagian yang tidak kosong dari suatu grup juga memiliki operasi biner dan aksioma yang sama. maka, grup seperti itu disebut subgrup. Untuk lebih jelasnya termuat dalam definisi berikut:

Definisi 2.2.1. [8] *Himpunan $H \neq \emptyset$ dan H merupakan subgrup dari G, jika H memenuhi sifat-sifat grup dengan operasi biner yang bersesuaian dengan grup G.*

Contoh 2.2.2. $\mathbb{Z} \neq \emptyset$ dan $\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari grup $\mathbb{Q}$ terhadap operasi biner penjumlahan, karena $\mathbb{Z}$ memenuhi sifat-sifat grup terhadap operasi biner penjumlahan.

Contoh 2.2.3. Misalkan

$$H = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

terhadap operasi komposisi fungsi adalah subgrup dari grup simetri S_3.

Berikut ini akan dibahas mengenai salah satu dari bentuk khusus dari permutasi yang disebut permutasi genap.

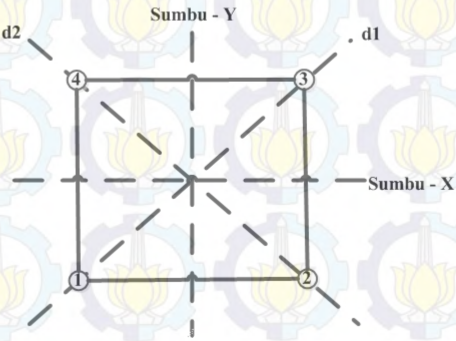
Definisi 2.2.4. [8] *Permutasi genap adalah permutasi yang merupakan komposisi dari transposisi berjumlah genap.*

Contoh 2.2.5. Misalkan $(1\ 2\ 3) \in S3$ merupakan permutasi genap karena $(1\ 2\ 3)$ dapat dinyatakan dalam komposisi dari transposisi $(1\ 3)(1\ 2)$ dan transposisi tersebut berjumlah dua(genap).

Berikut ini akan diperkenalkan mengenai grup permutasi lainnya yang akan digunakan dalam pembahasan.

Definisi 2.2.6. [8] *Grup dihedral adalah subgrup dari* S_n *yang anggotanya merupakan himpunan semua permutasi yang bersesuaian dengan rotasi dan refleksi dari segi*$-n$ *beraturan dan grup dihedral memuat elemen sebanyak* $2n$*.*

Gambar 2.1: Segi-empat Beraturan Beserta Sumbu Refleksinya



Contoh 2.2.7. Misalkan pada sebuah segiempat beraturan Berdasarkan Gambar 2.1 maka diperoleh permutasi-permutasi yang bersesuaian dengan rotasi dan refleksi, anatara lain:

1. permutasi identitas dapat dinyatakan sebagai (1)(2)(3)(4)
2. permutasi rotasi 90° berlawanan arah jarum jam dapat dinyatakan sebagai (1 2 3 4)
3. permutasi rotasi 180° berlawanan arah jarum jam dapat dinyatakan sebagai (1 3)(2 4)

4. permutasi rotasi $270°$ berlawanan arah jarum jam dapat dinyatakan sebagai (1 4 3 2)
5. permutasi reflesi terhadap $sumbu - x$ dapat dinyatakan sebagai (1 4)(2 3)
6. permutasi reflesi terhadap $sumbu - y$ dapat dinyatakan sebagai (1 2)(3 4)
7. permutasi reflesi terhadap diagonal 1 dapat dinyatakan sebagai (2 4)(1)(3)
8. permutasi reflesi terhadap diagonal 2 dapat dinyatakan sebagai (1 3)(2)(4)

Maka semua elemen dari grup dihedral D_4 yaitu $\{(), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4),$
$(2\ 4)(1)(3), (13)(2)(4)\}$.

Definisi 2.2.8. [10] $Gx = \{g(x) \in X : g \in G\}$ *yaitu himpunan semua peta* $x \in X$ *oleh permutasi* g *di* G. Gx *disebut orbit* x *terhadap* G.

Definisi 2.2.9. [10] $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$ *adalah himpunan semua permutasi di* G *sedemikian hingga* $g(x) = x$ *dengan* $g \in G$.

Dalam hal ini x disebut sebagai titik tetap dari g. Himpunan G_x disebut penstabil x di G.

Definisi 2.2.10. [10] $F(g) = \{x \in X : g(x) = x\}$ *adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi* $g \in G$.

Contoh 2.2.11. Misalkan G adalah grup permutasi dengan
$G = \{(), (1\ 2)(3\ 4\ 5), (3\ 5\ 4), (1\ 2), (3\ 4\ 5), (1\ 2)(3\ 5\ 4)\}$
dan $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
maka,

$G1 = \{1, 2\}$ $G_1 = \{(\ ), (3\ 5\ 4), (3\ 4\ 5)\}$
$G2 = \{1, 2\}$ $G_2 = \{(\ ), (3\ 5\ 4), (3\ 4\ 5)\}$
$G3 = \{3, 4, 5\}$ $G_3 = \{(\ ), (1\ 2)\}$
$G4 = \{3, 4, 5\}$ $G_4 = \{(\ ), (1\ 2)\}$
$G5 = \{3, 4, 5\}$ $G_5 = \{(\ ), (1\ 2)\}$
dan
$F((\ )) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$F((1\ 2)) = \{3, 4, 5\}$
$F((1\ 2)(345)) = \{\ \}$
$F((1\ 2)(354)) = \{\ \}$
$F((3\ 4\ 5)) = \{1, 2\}$
$F((3\ 5\ 4)) = \{1, 2\}$

Definisi 2.2.12. [10] *Jika g adalah grup dan X adalah himpunan yang berhingga, maka grup Action φ kiri dari G pada X adalah fungsi:*

$$\varphi : G\ x\ X \to X$$

yang memenuhi dua sifat:

(GA1) $(g * h) * x = g * (h * x); \forall g, h \in G,$ *dan* $\forall x \in X$

(GA2) $e * x = x; \forall x \in X$ *dengan e adalah elemen identitas dari grup G*

Dalam hal ini, X disebut $G - set$

Teorema 2.2.13. [11] *Jika X adalah $G - set$ dan $\forall x \in X$, maka:*

1. $\forall x \in X, |Gx|.|G_x| = |G|$ *atau* $|Gx| = \dfrac{|G|}{G_x}$

2. $\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)|$

2.3 Indeks Sikel

Indeks sikel dapat digunakan untuk enumerasi pola yang berhubungan dengan grup,karena dari indeks sikel dapat dihitung orbit dari setiap elemen dari grup permutasi.

Definisi 2.3.1. [12] *Diberikan G adalah grup permutasi dari suatu himpunan yang banyak anggotanya n dan $g \in G$ adalah komposisi dari sikel-sikel yang disjoint yang terdiri dari sikel dengan panjang 1 sebanyak a_1,sikel dengan panjang 2 sebanyak a_2,..., sikel dengan panjang n sebanyak a_n yang memenuhi $1a_1 + 2a_2 + ... + na_n = n$, maka indeks sikel g didefinisikan sebagai :*

$$Z(g; x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} ... x_n^{a_n}$$

Sedangkan indeks sikel grup G didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.3.2. [12] *Jika G adalah grup permutasi, maka indeks sikel dari grup permutasi G adalah*

$$Z(G; x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Z(g; x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

Contoh 2.3.3. Misalkan $G = S_3$, maka $|G| = 3! = 6$.

1. $p = (1)(2)(3)$, permutasi p memiliki tiga sikel dengan panjang satu, sehingga tipe permutasi p adalah $[3, 0, 0]$ dan indeks sikel p adalah $x_1^3 x_2^0 x_3^0 = x_1^3$

2. $q = (1\ 2\ 3)$, permutasi q memiliki satu sikel dengan panjang tiga, sehingga tipe permutasi q adalah $[0, 0, 1]$ dan indeks sikel q adalah $x_1^0 x_2^0 x_3^1 = x_3$

3. $r = (1\ 3\ 2)$, permutasi r memiliki satu sikel dengan panjang tiga, sehingga tipe permutasi r adalah $[0, 0, 1]$ dan indeks sikel r adalah $x_1^0 x_2^0 x_3^1 = x_3$

4. $s = (2\ 3)(1)$, permutasi s memiliki satu sikel dengan panjang dua dan satu sikel dengan panjang satu, sehingga tipe permutasi s adalah $[1,1,0]$ dan indeks sikel s adalah $x_1^1 x_2^1 x_3^0 = x_1 x_2$

5. $t = (1\ 2)(3)$, permutasi t memiliki satu sikel dengan panjang dua dan satu sikel dengan panjang satu, sehingga tipe permutasi t adalah $[1,1,0]$ dan indeks sikel t adalah $x_1^1 x_2^1 x_3^0 = x_1 x_2$

6. $u = (1\ 3)(2)$, permutasi u memiliki satu sikel dengan panjang dua dan satu sikel dengan panjang satu, sehingga tipe permutasi u adalah $[1,1,0]$ dan indeks sikel u adalah $x_1^1 x_2^1 x_3^0 = x_1 x_2$

Dari uraian di atas dapat diperoleh indeks sikel dari grup S_3 adalah:

$$Z(S_3; x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in S_3} Z(g; x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

$$Z(S_3; x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} (x_1^3 + 2x_3 + 3x_1 x_2)$$

2.4 Persediaan Pola

Persediaan pola dapat digunakan dalam penarikan kesimpulan akhir dalam enumerasi pola.

Definisi 2.4.1. [12] *Misalkan terdapat fungsi yang memetakan himpunan Y ke sebuah himpunan $r = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$. Persediaan pola (PI) terhadap grup G adalah:*

$$PI(G; y_1, y_2, ..., y_r) = \sum_{n_{i_1 i_2 \ldots i_r}} K(n_{i_1 i_2 \ldots i_r}) y_1^{i_1} y_2^{i_2} ... y_r^{i_r}$$

dengan $K(n_{i_1 i_2 \ldots i_r})$ *adalah koefisien yang menyatakan banyaknya pewarnaan yang dapat dibedakan (banyak pola) sehingga pola* y_1 *sebanyak* i_1 *, pola* y_2 *sebanyak* i_2 *, ..., pola* y_r *sebanyak* n_r*.*

2.5 Graf Sederhana

Definisi 2.5.1. [13] *Graf* G *didefinisikan sebagai pasangan himpunan* (V, E) *dengan* V *adalah himpunan dari simpul-simpul tidak kosong dan* E *adalah himpunan dari sisi-sisi yang menghubungkan dua simpul dan mungkin kosong. Sebuah Graf dikatakan sederhana jika graf tersebut tidak mempunyai sisi ganda maupun loop.*

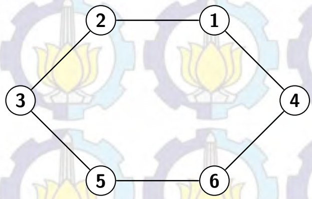
Definisi 2.5.2. [14] *Dua buah graf* G_1 *dan* G_2 *dengan* $G_1 = (V_1, E_1)$ *dan* $G_2 = (V_2, E_2)$ *dikatakan isomorfis jika terdapat fungsi bijektif* $f : V_1 \to V_2$ *dengan sifat* $\forall a, b \in V_1$ *bertetangga jika dan hanya jika* $f(a), f(b) \in V_2$ *bertetangga, ,untuk setiap* $a, b \in V_1$*.*

Contoh 2.5.3. Dua Graf pada Gambar 2.2 (a) dan (b) adalah contoh dari dua graf sederhana yang saling isomorfis karena terdapat dua fungsi bijektif yang mempertahankan sifat ketetanggan dari dua graf tersebut. Fungsi bijektif antara dua graf tersebut adalah $f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 1, f(4) = 6, f(5) = 4$ *dan* $f(6) = 2$.

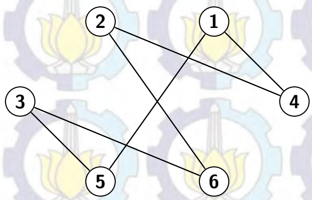
Teorema 2.5.4. [14] *Banyaknya graf sederhana yang mungkin dibuat dengan* n *simpul adalah* $2^{\binom{n}{2}}$ *graf.*

Contoh 2.5.5. Terdapat 8 graf sederhana yang mungkin dibuat dengan 3 simpul, karena $\binom{3}{2} = 3$ sehingga $2^3 = 8$.

Gambar 2.2: Dua Graf yang Saling Isomorfis



(a) Graf Sederhana dengan Enam Simpul dan Enam Sisi



(b) Graf yang Isomorfis dengan Gambar 2.2(a)

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB III
METODE PENELITIAN

Dalam pengerjaan Tugas Akhir ini dilakukan beberapa tahapan,yaitu:

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan pengumpulan referensi mengenai Teorema Polya I dan Teorema Polya II serta enumerasi graf sederhana yang tidak isomorfis melalui paper-paper dalam jurnal ilmiah maupun dalam buku-buku literatur.

3.2 Menguraikan grup simetri S_6

Pada tahap ini dilakukan penguraian semua elemen dari grup simetri S_6.

3.3 Mengelompokkan grup Simetri S_6 berdasarkan indeks sikelnya

Pada tahap ini dilakukan pengelompokkan elemen grup simetri S_6 berdasarkan indeks sikelnya.

3.4 Membentuk indeks sikel yang baru

Pada tahap ini dilakukan penguraian indeks sikel dari grup simetri S_6 ke grup permutasi R_6 (permutasi dari sisi graf).

3.5 Menghitung banyaknya graf

Pada tahap ini dilakukan perhitungan banyaknya graf yang terbentuk dengan menggunakan Teorema Polya I.

3.6 Menentukan jenis graf yang tidak isomorfis

Pada tahap ini akan ditentukan jenis graf yang terbentuk dari Teorema Polya I menggunakan Teorema Polya II dan dengan bantuan software Maxima.

3.7 Menggambar jenis graf yang terbentuk

Pada tahap ini dilakukan penguraian graf yang terbentuk.

3.8 Menulis laporan Tugas Akhir

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penulisan laporan Tugas Akhir dan penarikan kesimpulan terhadap pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya serta pemberian saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASANYA

Pada bab ini dibahas tentang Teorema Burnside dan Teorema Polya disertai dengan pembuktiannya. Pembahasan ini dimulai dengan penjelasan Teorema Burnside dan Teorema Polya. Kemudian akan dibahas mengenai graf sederhana dengan enam simpul lalu dibahas tentang pola-pola yang tidak isomorfis. Setelah itu dilakukan enumerasi graf sederhana dengan enam simpul dengan menggunakan Teorema Polya I dan Teorema Polya II.

4.1 Teorema Burnside dan Teorema Polya

Pada bagian ini akan diberikan Teorema Burnside dan Teorema Polya. Teorema Burnside dapat digunakan untuk menghitung banyaknya pola yang tidak isomorfis berdasarkan banyaknya titik tetap permutasi dari suatu grup yang permutasi yang bertindak terhadap pola tersebut.

Teorema 4.1.1. ***Teorema Burnside*** [12] *Misalkan X adalah G-set dengan G dan X berhingga. Jika n adalah banyaknya orbit di X pada G, maka:*

$$n = \frac{1}{|G|}\Sigma_{g\in G}|F(g)| \tag{4.1}$$

Bukti

Banyaknya pasangan terurut (g, x) yang memenuhi $g(x) = x$ dapat dinyatakan dalam dua cara yaitu:

$$\Sigma_{x\in X}\Sigma_{g\in G}[g(x) = x] = \Sigma_{g\in G}\Sigma_{x\in X}[g(x) = x] \tag{4.2}$$

Untuk setiap g tetap di G,

$$\Sigma_{x\in X}[g(x)=x]=|F(g)| \tag{4.3}$$

Untuk sebarang x tetap di X

$$\Sigma_{g\in G}[g(x)=x]=|G_x| \tag{4.4}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.3) dan Persamaan (4.4) ke Persamaan (4.2) diperoleh

$$\Sigma_{g\in G}|F(g)|=\Sigma_{x\in X}|G_x|$$

Dari Teorema 2.2.13 diperoleh $|Gx|=\frac{|G|}{|G_x|}$.
Jika x_i dan $x_{i'}$ dalam satu orbit, maka

$$|G_{x_i}|=\frac{|G|}{|Gx_i|}=\frac{|G|}{|Gx_{i'}|}=|Gx_i|$$

Jika dipilih $x_1,x_2,\ldots,x_n$ dari n orbit dengan x_i mewakili orbit ke-i, maka diperoleh

$$\Sigma_{x\in X}G_x=\sum_{i=1}^{n}|Gx_i|\cdot|G_{x_i}|=\sum_{i=1}^{n}\frac{|G|}{|G_{x_i}|}|G_{x_i}|=n|G|$$

Jadi,

$$n=\frac{1}{|G|}\Sigma_{x\in X}|G_x|=\frac{1}{|G|}\Sigma_{g\in G}|F(g)|$$

Pada bagian ini akan dibahas tentang Teorema Polya I. Sama seperti Teorema Burnside, Teorema Polya I digunakan untuk menghitung banyaknya pola yang tidak isomorfis, namun dalam Teorema Polya I tidak diperlukan banyaknya orbit untuk menghitung pola tersebut, tetapi menggunakan indeks sikel dari grup yang bertindak terhadap pola tersebut.

Teorema 4.1.2. ***Teorema Polya I*** [12] *Diberikan* $C = \{f|f : X \to Y\}$ *dengan* $|X| = n \geq 2$ *dan* $|Y| = r$. *Jika* G *merupakan grup permutasi yang beraksi pada* X *dengan indeks sikel* $Z(G; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *maka banyaknya pola di* C *terhadap* G *adalah* $Z(G; r, r, r, \ldots, r)$.

Bukti
Jika $g \in G$, maka $f \in F(g) \Leftrightarrow f$ tetap oleh tiap-tiap sikel dari g. Dan jika g adalah permutasi bertipe $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ maka $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ menyatakan banyaknya sikel disjoint di g, sehingga banyaknya permutasi yang tetap oleh g adalah $r^{a_1+a_2+\ldots+a_n}$. Jadi, diperoleh $|F(g)| = r^{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ dengan $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ adalah tipe permutasi g. Berdasarkan Teorema Burnside, banyaknya orbit yang berbeda adalah

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F(g)| \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r^{a_1+a_2+\ldots+a_n} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r^{a_1}\cdot r^{a_2}\cdots r^{a_n} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} z(g; r, r, \ldots, r) \\ &= Z(G; r, r, \ldots, r) \end{aligned}$$

Pada bagian ini akan dibahas tentang Teorema Polya II,tidak seperti Teorema Burnside maupun Teorema Polya I, Teorema Polya II digunakan untuk bentuk pola yang tidak isomorfis yang diperoleh dari Teorema Polya I.

Teorema 4.1.3. ***Teorema Polya II*** [12] *Diberikan* $C = \{f|f : X \to Y\}$ *dengan* $|X| = n \geq 2$ *dan* $|Y| = r$. *Jika* G *merupakan grup permutasi yang beraksi pada* X *dengan* *indeks sikel $Z(G; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, maka maka Persediaan pola $PI(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ adalah merupakan indeks sikel dari $Z(G; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ dengan $x_i = y_1^i + y_2^i + \cdots + y_r^i$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$*

Bukti
Fungsi pembangkit konfigurasi dengan dua variabel diberikan oleh $F(x, y) = \sum c_{mn} x^m y^n$ dengan c_{mn} adalah banyaknya pola dengan m pola x dan n pola y. Jika $|Y| = r$ dengan $y = y_1, y_2, \ldots, y_r$ maka diperoleh:

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_r) = \sum n_{i_1 i_2 \ldots i_r} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \cdots y_r^{i_r} \tag{4.5}$$

dengan $i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_r = r$.
Untuk setiap $f \in C$, didefinisikan $c(f) = y_1^{i_1} y_2^{i_2} \cdots y_r^{i_r}$ dengan menyatakan f adalah pola yang memuat y_1 sebanyak i_1, memuat y_2 sebanyak i_2, dan seterusnya.
Jika $h \in Gf$, maka $c(h) = c(f)$. Jadi, jika $h, f \in C$ dalam satu orbit maka $c(h) = c(f)$. Oleh karena itu, untuk $F \in C/G$, dengan C/G adalah himpunan orbit-orbit berbeda yang ada di C di bawah G, dapat dituliskan $c(F)$ untuk menyatakan pola dari elemen-elemen yang berada di F.
Selanjutnya akan dibuktikan dengan menggunakan langkah-langkah seperti dalam pembuktian Teorema Burnside. Berdasarkan Persamaan (4.2) maka diperoleh

$$\sum_{f \in C} \sum_{g \in C} [g(f) = f] c(f) = \sum_{g \in C} \sum_{f \in C} [g(f) = f] c(f) \tag{4.6}$$

Dari Persamaan (4.6), pada ruas kiri diperoleh

$$\sum_{f \in C} \sum_{g \in C} [g(f) = f] c(f) = \sum_{f \in C} c(f) \sum_{g \in C} [g(f) = f] = \sum_{f \in C} c(f) |G_f|$$

Selanjutnya akan dijumlahkan atas orbit yang lain, karena

$|c(f)|$ dan $|G_f|$ hanya bergantung pada orbit, maka

$$\sum_{f\in C} c(f)|G_f| = c(f_{1_1})|G_{f_{1_1}}| + c(f_{1_2})|G_{f_{1_2}}| + \cdots + c(f_{2_1})|G_{f_{2_1}}| + \cdots \tag{4.7}$$

Karena $f_{i_1}, f_{i_2}, \cdots$ terletak dalam satu orbit maka $c(f_{i_j}) = c(F_i)$, sehingga Persamaan (4.7) menjadi

$$c(F_1)|G_{f_{1_1}}| + |G_{f_{1_2}}| + \cdots c(F_2)|G_{f_{2_1}}| + |G_{f_{2_2}}| + \cdots + \cdots$$
$$= \sum_{F\in C/G} c(F) \sum_{f\in F} |G_f| = \sum_{F\in C/G} c(F)|G| = |G| \sum_{F\in C/G} c(F)$$

Karena $c(F) = y_1^{i_1} y_2^{i_2} \cdots y_r^{i_r}$ maka $\sum_{F\in C/G} c(F)$ merupakan fungsi pembangkit pola di C, sedangkan koefisien dari $y_1^{i_1} y_2^{i_2} \cdots y_r^{i_r}$ adalah banyaknya orbit yang berlaku di $c(F) = y_1^{i_1} y_2^{i_2} \cdots y_r^{i_r}$. Jadi, diperoleh

$$|G| \sum_{F\in C/G} c(F) = |G| F(y_1, y_2, \ldots, y_r) \tag{4.8}$$

Sedangkan dari ruas kanan di Persamaan (4.6) diperoleh

$$\sum_{g\in G} \sum_{f\in C} [g(f) = f] c(f) = \sum_{g\in G} \sum_{f\in F(g)} c(f)$$

Karena $|F(g)| = \sum_{f\in F(g)} 1$ dapat dihitung melalui sikel-sikel yang saling disjoint di g yaitu

$$|F(g)| = r^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$
$$= z(g; r, r, \ldots, r)$$

dengan $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ adalah tipe permutasi dari g maka $\sum_{f\in F(g)} c(f)$ juga dapat dituliskan sebagai notasi indeks sikel polinomial.

Misalkan untuk $g \in S_6$, dengan $g = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)$, maka tipe permutasi dari g adalah [0,1,0,1,0,0], maka
$|F(g)| = r^{a_1+a_2+\cdots+a_n} = r^2$.
Untuk $f \in F(g)$, titik 1,2 berada dalam satu orbit sehingga memiliki pola yang sama. Begitu pula dengan titik-titik 3,4,5,6 juga memiliki pola yang sama. Jadi, jumlahan r^2 adalah $(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2)(y_1^4 + y_2^4 + \cdots + y_r^4)$ yang berarti $c(f) = (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2)(y_1^4 + y_2^4 + \cdots + y_r^4)$.
Dari uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa untuk setiap sikel dengan panjang j didapatkan faktor $y_1^j + y_2^j + \cdots + y_r^j$ pada $\sum_{f\in F(g)} c(f)$.
Jadi,

$$\sum_{f\in F(g)} c(f) = z(g; y_1 + y_2 + \cdots + y_r, \ldots, y_1^n + y_2^n + \cdots + y_r^n) \tag{4.9}$$

Lalu Persamaan (4.8) dan Persamaan (4.9) disubstitusikan ke Persamaan (4.6) diperoleh

$$|G|F(y_1, y_2, \ldots, y_r) = z(g; y_1 + y_2 + \cdots + y_r, \ldots, y_1^n + y_2^n + \cdots + y_r^n)$$
$$F(y_1, y_2, \ldots, y_r) = \frac{1}{|G|} z(g; y_1 + y_2 + \cdots + y_r, \ldots, y_1^n + y_2^n + \cdots + y_r^n)$$
$$F(y_1, y_2, \ldots, y_r) = z(G; x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

dengan $x_i = y_1^i + y_2^i + y_3^i + \cdots + y_r^i$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

4.2 Perbedaan Penggunaan Teorema Burnside dan Teorema Polya

Dalam Teorema Burnside, diperlukan orbit elemen dari masing-masing sikel grup untuk mementukan banyaknya pola yang mungkin, sedangkan dalam Teorema Polya I hanya memerlukan indeks sikel dari elemen-elemen grup untuk menghitung banyaknya pola dan Teorema Polya II digunakan untuk mengetahui jenis pola-pola yang terbentuk

dari Teorema Polya I. Berikut ini akan ditampilkan contoh antara perbedaan penggunaan Teorema Polya I dan Teorema Burnside.
Berapa banyak cara mewarnai sudut dari persegi dengan tiga warna ?
Penyelesaian
Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep grup Dehidral D_4. Dari Persamaan (4.1) dan Gambar 2.1 akan dicari $F(g)$ atau titik tetap permutasi dari setiap elemen grup dehidral D_4. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ adalah $G - set$ dari grup dehidral D_4.

1. Dengan Menggunakan Teorema Burnside
   (a) $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)$
   maka, $|F(e)| = 3^4 = 81$
   (b) $r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4)$
   maka, $|F(r_1)| = 3^1 = 3$
   (c) $r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4)$
   maka, $|F(r_2)| = 3^2 = 9$
   (d) $r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3\ 2)$
   maka, $|F(r_3)| = 3^1 = 3$
   (e) $r_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 3)$
   maka, $|F(r_x)| = 3^2 = 9$
   (f) $r_y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$
   maka, $|F(r_y)| = 3^2 = 9$

(g) $r_{d_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2)(4)$

maka, $|F(r_{d_1})| = 3^3 = 27$

(h) $r_{d_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 4)(1)(3)$

maka, $|F(r_{d_2})| = 3^3 = 27$

Dengan menggunakan Teorema Burnside sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{|D_4|} \sum_{g \in D_4} |F(g)| \\ &= \frac{1}{81}[81 + 3 + 9 + 3 + 9 + 9 + 27 + 27] \\ &= \frac{1}{8}[168] \\ &= 21 \end{aligned}$$

Dapat diperoleh kesimpulan bahwa terdapat 21 pewarnaan untuk mewarnai sudut persegi dengan tiga warna.

2. Dengan Menggunakan Teorema Polya I
Pertama, akan diuraikan semua elemen dari grup Dehidral D_4 dalam Tabel 4.1.
Sehingga, indeks sikel dari D_4 adalah

$$Z(D_4) = \frac{1}{8}[x_1^4 + 3x_2^2 + 2x_1^2 x_2 + 2x_4] \tag{4.10}$$

Tabel 4.1: Elemen-elemen dari Grup Dihedral D_4

No.	D_4
1	(1)(2)(3)(4)
2	(1 2 3 4)
3	(1 3)(2 4)
4	(1 4 3 2)
5	(1 4)(2 3)
6	(1 2)(3 4)
7	(1 3)(2)(4)
8	(2 4)(1)(3)

Lalu substitusikan nilai $x_1 = x_2 = x_4 = 3$ pada Persamaan (4.10) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} Z(D_4)(3,3,3,3) &= \frac{1}{8}[3^4 + 3.3^2 + 2.3^2.3 + 2.3] \\ Z(D_4)(3,3,3,3) &= \frac{1}{8}[81 + 27 + 54 + 6] \\ Z(D_4)(3,3,3,3) &= \frac{1}{8}[168] \\ Z(D_4)(3,3,3,3) &= 21 \end{aligned}$$

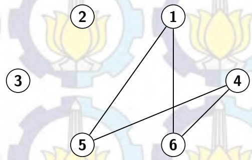
Dapat diperoleh kesimpulan terdapat 21 pewarnaan dan hasil tersebut sesuai dengan hasil perhitungan dengan menggunakan Teorema Burnside.

4.3 Isomorfime Graf Sederhana Enam Simpul

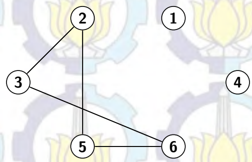
Pada bagian ini akan dibahas mengenai graf sederhana enam simpul.

Definisi 4.3.1. [14] *Dua buah graf* G_1 *dan* G_2 *dengan* $G_1 = (V_1, E_1)$ *dan* $G_2 = (V_2, E_2)$ *dikatakan isomorfis jika terdapat fungsi bijektif* $f : V_1 \rightarrow V_2$ *dengan sifat* $\forall a, b \in V_1$ *bertetangga* *jika dan hanya jika* $f(a), f(b) \in V_2$ *bertetangga, untuk setiap* $a, b \in V_1$.

Gambar 4.1: Dua Graf yang Saling Isomorfis dengan Empat sisi



(a) Graf Sederhana dengan Enam Simpul dan Enam Sisi

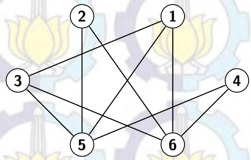


(b) Graf yang Isomorfis dengan Gambar 4.1(a)

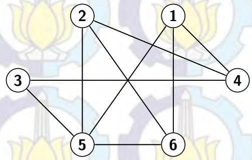
Contoh 4.3.2. Dua Graf pada Gambar 4.1 (a) dan (b) adalah contoh dari dua graf sederhana yang saling isomorfis karena terdapat dua fungsi bijektif yang mempertahankan sifat ketetanggan dari dua graf tersebut. Fungsi bijektif antara dua graf tersebut adalah $f(1) = 5, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 3, f(5) = 6$ *dan* $f(6) = 2$.

Contoh 4.3.3. Dua Graf pada Gambar 4.2 (a) dan (b) adalah contoh dari dua graf sederhana yang saling tidak isomorfis karena terdapat tidak terdapat dua fungsi bijektif yang mempertahankan sifat ketetanggan dari dua graf tersebut.

Gambar 4.2: Dua Graf yang Tidak Saling Isomorfis dengan Sembilan sisi



(a) Graf Sederhana dengan Enam Simpul dan Sembilan Sisi



(b) Graf yang Tidak Isomorfis dengan Gambar 4.2(a)

4.4 Enumerasi Graf Sederhana Enam Simpul Tidak Isomorfis

Diberikan himpunan simpul $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang merupakan himpunan simpul dari suatu graf. Apabila 6 simpul pada graf tersebut dikenakan permutasi, maka pasangan simpul tak terurut graf tersebut juga mengalami permutasi. Pasangan simpul tak terurut dapat dipandang sebagai suatu sisi. Jika himpunan permutasi pada simpul-simpul suatu graf membentuk suatu grup simetri S_6, maka seluruh bentuk grup S_6 adalah $6! = 720$.

Selanjutnya dari elemen-elemen permutasi tersebut akan diperoleh tipe permutasi dan indeks sikel permutasi sesuai dengan Lampiran 1. Sebagai contoh, untuk permutasi

$(1\ \ 2) \in S_6$ merupakan bentuk sederhana dari permutasi $(1\ \ 2)(3)(4)(5)(6)$. Permutasi tersebut memiliki satu sikel dangan panjang dua dan empat sikel dengan panjang satu. Sehingga, Indeks sikel dan tipe permutasi dari permutasi tersebut berturut-turut masing-masing adalah $[4, 1, 0, 0, 0, 0]$ dan $x_1^4x_2$. Untuk grup simetri S_6, tipe permutasi dan indeks sikel secara keseluruhan dapat diperoleh sebagai berikut :

1. Permutasi dengan tipe permutasi [6,0,0,0,0,0] ada satu, yaitu permutasi no. 1 dengan indeks sikelnya x_1^6.

2. Permutasi dengan tipe permutasi [4,1,0,0,0,0] ada lima belas, yaitu permutasi no. 2 sampai 16 dengan indeks sikelnya $x_1^4x_2$.

3. Permutasi dengan tipe permutasi [3,0,1,0,0,0] ada empat puluh, yaitu permutasi no. 17 sampai 56 dengan indeks sikelnya $x_1^3x_3$.

4. Permutasi dengan tipe permutasi [2,2,0,0,0,0] ada empat puluh lima, yaitu permutasi no. 57 sampai 101 dengan indeks sikelnya $x_1^2x_2^2$.

5. Permutasi dengan tipe permutasi [2,0,0,1,0,0] ada sembilan puluh, yaitu permutasi no. 102 sampai 191 dengan indeks sikelnya $x_1^2x_4$.

6. Permutasi dengan tipe permutasi [1,1,1,0,0,0] ada seratus dua puluh, yaitu permutasi no. 192 sampai 311 dengan indeks sikelnya $x_1x_2x_3$.

7. Permutasi dengan tipe permutasi [1,0,0,0,1,0] ada seratus empat puluh empat, yaitu permutasi no. 312 sampai 455 dengan indeks sikelnya x_1x_5.

8. Permutasi dengan tipe permutasi [0,1,0,1,0,0] ada sembilan puluh, yaitu permutasi no. 456 sampai 545 dengan indeks sikelnya x_2x_4.

9. Permutasi dengan tipe permutasi [0,0,2,0,0,0] ada empat puluh, yaitu permutasi no. 546 sampai 585 dengan indeks sikelnya x_3^2.

10. Permutasi dengan tipe permutasi [0,3,0,0,0,0] ada lima belas, yaitu permutasi no. 586 sampai 600 dengan indeks sikelnya x_2^3.

11. Permutasi dengan tipe permutasi [0,0,0,0,0,1] ada seratus dua puluh, yaitu permutasi no. 601 sampai 720 dengan indeks sikelnya x_6.

Secara keseluruhan, tipe indeks sikel dari elemen grup simetri S_6 dapat diringkas pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2: Indeks Sikel Grup Simetri S_6

No.	Tipe Permutasi	Indeks Sikel
1	[6,0,0,0,0,0]	x_1^6
2	[4,1,0,0,0,0]	$x_1^4x_2$
3	[3,0,1,0,0,0]	$x_1^3x_3$
4	[2,2,0,0,0,0]	$x_1^2x_2^2$
5	[2,0,0,1,0,0]	$x_1^2x_4$
6	[1,1,1,0,0,0]	$x_1x_2x_3$
7	[1,0,0,0,1,0]	x_1x_5
8	[0,1,0,1,0,0]	x_2x_4
9	[0,0,2,0,0,0]	x_3^2
10	[0,3,0,0,0,0]	x_2^3
11	[0,0,0,0,0,1]	x_6

Jika himpunan permutasi pada simpul-simpul suatu graf membentuk grup simetri S_6, maka permutasi dari pasangan terurut simpul akan membentuk grup permutasi R_6 dengan cara membangkitkan indeks sikel dari grup simetri S_6 sehingga diperoleh:

1. Misalkan permutasi $A = (\ )$ dengan indeks sikelnya x_1^6 akan membangkitkan permutasi A' dengan

$$A' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \end{pmatrix}$$
$$=(12)(13)(14)(15)(16)(23)(24)(25)(26)(34)(35)(36)(45)(46)(56)$$

   Permutasi dengan indeks sikel x_1^6 akan membangkitkan permutasi dengan indeks sikel x_1^{15}.

2. Misalkan permutasi $B = (1\ 2)$ dengan indeks sikelnya $x_1^4 x_2$ akan membangkitkan permutasi B' dengan

$$B' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 23 & 24 & 25 & 26 & 13 & 14 & 15 & 16 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \end{pmatrix}$$
$$=(12)(34)(35)(36)(45)(46)(56)(13\ 23)(14\ 24)(15\ 25)(16\ 26)$$

   Permutasi dengan indeks sikel $x_1^4 x_2$ akan membangkitkan permutasi dengan indeks sikel $x_1^7 x_2^4$.

3. Misalkan permutasi $C = (1\ 2\ 3)$ dengan indeks sikelnya $x_1^3 x_3$ akan membangkitkan permutasi C' dengan

$$C' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 12 & 24 & 25 & 26 & 13 & 34 & 35 & 36 & 14 & 15 & 16 & 45 & 46 & 56 \end{pmatrix}$$
$$=(45)(46)(56)(12\ 23\ 13)(14\ 24\ 34)(15\ 25\ 35)(16\ 26\ 36)$$

   Permutasi dengan indeks sikel $x_1^3 x_3$ akan membangkitkan permutasi dengan indeks sikel $x_1^3 x_3^4$.

4. Misalkan permutasi $D = (1\ 2)(3\ 4)$ dengan indeks sikelnya $x_1^2 x_2^2$ akan membangkitkan permutasi D'

dengan

$$D' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 24 & 23 & 25 & 26 & 14 & 13 & 15 & 16 & 34 & 45 & 46 & 35 & 36 & 56 \end{pmatrix}$$
$$=(12)(34)(56)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 25)(16\ 26)(35\ 45)(36\ 46)$$

Permutasi dengan indeks sikel $x_1^2x_2^2$ akan membangkitkan permutasi dengan indeks sikel $x_1^3x_2^6$.

5. Misalkan permutasi $E = (1\ 2\ 3\ 4)$ dengan indeks sikelnya $x_1^2x_4$ akan membangkitkan permutasi E' dengan

$$E' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 24 & 12 & 25 & 16 & 34 & 13 & 35 & 36 & 14 & 45 & 46 & 15 & 16 & 56 \end{pmatrix}$$
$$=(56)(13\ 24)(12\ 23\ 34\ 14)(15\ 25\ 35\ 45)(16\ 26\ 36\ 46)$$

Permutasi dengan indeks sikel $x_1^2x_4$ akan membangkitkan permutasi dengan indeks sikel $x_1x_2x_4^3$.

6. Misalkan permutasi $F = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$ dengan indeks sikelnya $x_1x_2x_3$ akan membangkitkan permutasi F' dengan

$$F' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 24 & 25 & 23 & 26 & 14 & 15 & 13 & 16 & 45 & 34 & 46 & 35 & 56 & 36 \end{pmatrix}$$
$$=(12)(16\ 26)(34\ 45\ 35)(36\ 46\ 56)(13\ 24\ 15\ 23\ 14\ 25)$$

Permutasi dengan indeks sikel $x_1x_2x_3$ akan membangkitkan permutasi dengan indeks sikel $x_1x_2x_3^2x_6$.

7. Misalkan permutasi $G = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ dengan indeks sikelnya x_1x_5 akan membangkitkan permutasi G' dengan

$$G' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 24 & 25 & 12 & 26 & 34 & 35 & 13 & 36 & 45 & 14 & 46 & 15 & 56 & 16 \end{pmatrix}$$
$$=(12\ 23\ 34\ 45\ 15)(13\ 24\ 35\ 14\ 25)(16\ 26\ 36\ 46\ 56)$$

Permutasi dengan indeks sikel x_1x_5 akan membangkitkan permutasi dengan indeks sikel x_5^3.

8. Misalkan permutasi $H = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)$ dengan indeks sikelnya x_2x_4 akan membangkitkan permutasi $H^{'}$ dengan

$$H^{'} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 24 & 25 & 26 & 23 & 14 & 15 & 16 & 13 & 45 & 46 & 34 & 56 & 35 & 36 \end{pmatrix}$$
$$=(12)(35\ 46)(13\ 24\ 15\ 26)(14\ 25\ 16\ 23)(34\ 45\ 56\ 36)$$

Permutasi dengan indeks sikel x_2x_4 akan membangkitkan permutasi dengan indeks sikel $x_1x_2x_4^3$.

9. Misalkan permutasi $I = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$ dengan indeks sikelnya x_3^2 akan membangkitkan permutasi $I^{'}$ dengan

$$I^{'} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 12 & 25 & 26 & 24 & 13 & 35 & 36 & 34 & 15 & 16 & 14 & 56 & 45 & 46 \end{pmatrix}$$
$$=(12\ 23\ 13)(14\ 25\ 36)(15\ 26\ 34)(16\ 24\ 35)(45\ 56\ 46)$$

Permutasi dengan indeks sikel x_3^2 akan membangkitkan permutasi dengan indeks sikel x_3^5.

10. Misalkan permutasi $J = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$ dengan indeks sikelnya x_2^3 akan membangkitkan permutasi $J^{'}$ dengan

$$J^{'} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 24 & 23 & 26 & 25 & 14 & 13 & 16 & 15 & 34 & 46 & 45 & 36 & 35 & 56 \end{pmatrix}$$
$$=(12)(34)(56)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 26)(16\ 25)(35\ 46)(36\ 45)$$

Permutasi dengan indeks sikel x_2^3 akan membangkitkan permutasi dengan indeks sikel $x_1^3x_2^6$.

11. Misalkan permutasi $K = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ dengan indeks sikelnya x_6 akan membangkitkan permutasi $K^{'}$ dengan

$$K^{'} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 24 & 25 & 26 & 12 & 34 & 35 & 36 & 13 & 45 & 46 & 14 & 56 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$
$$=(14\ 25\ 36)(12\ 23\ 34\ 45\ 56\ 16)(13\ 24\ 35\ 46\ 15\ 26)$$

Permutasi dengan indeks sikel x_6 akan membangkitkan permutasi dengan indeks sikel $x_3x_6^2$.

Tabel 4.3: Perubahan Indeks Sikel S_6 Menjadi Indeks Sikel R_6

No.	S_6	R_6
1	x_1^6	x_1^{15}
2	$x_1^4x_2$	$x_1^7x_2^4$
3	$x_1^3x_3$	$x_1^3x_3^4$
4	$x_1^2x_2^2$	$x_1^3x_2^6$
5	$x_1^2x_4$	$x_1x_2x_4^3$
6	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3^2x_6$
7	x_1x_5	x_5^3
8	x_2x_4	$x_1x_2x_4^3$
9	x_3^2	x_3^5
10	x_2^3	$x_1^3x_2^6$
11	x_6	$x_3x_6^2$

Keseluruhan perubahan indeks sikel S_6 menjadi indeks sikel R_6 dapat dinyatakan dalam Tabel 4.3.
Sehingga dengan menggunakan teorema Polya I diperoleh:

$$\begin{aligned} Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \quad = \quad & \frac{1}{720}[x_1^{15} + 15x_1^7x_2^4 + 40x_1^3x_3^4 + \\ & 45x_1^3x_2^6 + 90x_1x_2x_4^3 + \\ & 120x_1x_2x_3^2x_6 + 144x_5^3 + \\ & 90x_1x_2x_4^3 + 40x_3^5 + 15x_1^3x_2^6 \\ & +120x_3x_6^2] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pada graf sederhana hanya terdapat dua keadaan pada himpunan Y, yaitu ada himpunan sisi pada himpunan simpul dan tidak ada sisi pada himpunan simpul, sehingga $r = 2$ maka menyebabkan $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 2$, dengan mensubstitusikan nilai tersebut pada Persamaan

(4.11) diperoleh:

$$Z(R_6; 2,2,2,2,2,2) = \frac{1}{720}[2^{15} + 15.2^7.2^4 + 40.2^3.2^4 + 45.2^3.2^6 + 90.2.2.2^3 + 120.2.2.2^2.2 + 144.2^3 + 90.2.2.2^3 + 40.2^5 + 15.2^3.2^6 + 120.2.2^2]$$

$$Z(R_6; 2,2,2,2,2,2) = \frac{1}{720}[32768 + 30720 + 5120 + 23040 + 2880 + 3840 + 1152 + 2880 + 1280 + 7680 + 960]$$

$$Z(R_6; 2,2,2,2,2,2) = \frac{1}{720}[112320] = 156$$

Jadi untuk graf sederhana dengan enam simpul, maka akan terdapat 156 graf yang tidak saling isomorfis.
Ambil dua pola di himpunan Y, misalkan T = tidak mempunyai sisi dan A = mempunyai sisi, kemudian substitusikan nilai $x_1 = T + A, x_2 = T^2 + A^2, x_3 = T^3 + A^3, x_4 = T^4 + A^4, x_5 = T^5 + A^5, x_6 = T^6 + A^6$ pada Persamaan (4.11) sehingga diperoleh:

$$Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$= \frac{1}{720}[(T + A)^{15} + 15(T + A)^7(T^2 + A^2)^4 + 40(T + A)^3 (T^3 + A^3)^4 + 45(T + A)^3(T^2 + A^2)^6 + 90(T + A) (T^2 + A^2)(T^4 + A^4)^3 + 120(T + A)(T^2 + A^2)(T^3 + A^3)^2 (T^6 + A^6) + 144(T^5 + A^5)^3 + 90(T + A)(T^2 + A^2) (T^4 + A^4)^3 + 40(T^3 + A^3)^5 + 15(T + A)^3(T^2 + A^2)^6 + 120(T^3 + A^3)(T^6 + A^6)^2] \quad (4.12)$$

dilakukan perkalian pada setiap suku di ruas kanan pada Persamaan (4.12) kemudian disederhanakan sehingga diperoleh:

$$Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = T^{15} + T^{14}A + 2T^{13}A^2 + 5T^{12} A^3 + 9T^{11}A^4 + 15T^{10}A^5 + 21T^9A^6 + 24T^8A^7 + 24T^7A^8 + 21T^6A^9 + 15T^5A^{10} + 9T^4A^{11} + 5T^3A^{12} + 2T^2A^{13} + TA^{14} + A^{15}] \tag{4.13}$$

Dari Persamaan (4.13) dapat disimpulkan bahwa terdapat 156 graf sederhana enam simpul yang tidak isomorfis dengan rincian sebagai berikut:

1. satu graf tanpa sisi
2. satu graf dengan satu sisi
3. dua graf dengan dua sisi
4. lima graf dengan tiga sisi
5. sembilan graf dengan empat sisi
6. lima belas graf dengan lima sisi
7. dua puluh satu graf dengan enam sisi
8. dua puluh empat graf dengan tujuh sisi
9. dua puluh empat graf dengan delapan sisi
10. dua puluh satu graf dengan sembilan sisi
11. lima belas graf dengan sepuluh sisi

12. sembilan graf dengan sebelas sisi

13. lima graf dengan dua belas sisi

14. dua graf dengan tiga belas sisi

15. satu graf dengan empat belas sisi

16. satu graf dengan lima belas sisi

Untuk selanjutnya, dalam Tugas Akhir ini untuk menentukan dua buah graf dikatakan isoorfia atau tidak, penulis menggunakan bantuan software *Graph Isomorphism*.

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Enumerasi dengan menggunakan Teorema Polya I dan Teorema Polya II diperoleh 156 graf sederhana dengan enam simpul yang tidak saling isomorfis.

2. Bentuk-bentuk dari 156 graf yang tidak isomorfis tersebut yaitu satu graf tanpa sisi, satu graf dengan satu sisi, dua graf dengan dua sisi, lima graf dengan tiga sisi, sembilan graf dengan empat sisi, lima belas graf dengan lima sisi, dua puluh satu graf dengan enam sisi, dua puluh empat graf dengan tujuh sisi, dua puluh empat graf dengan delapan sisi, dua puluh satu graf dengan sembilan sisi, lima belas graf dengan sepuluh sisi, sembilan graf dengan sebelas sisi, lima graf dengan dua belas sisi, dua graf dengan tiga belas sisi, satu graf dengan empat belas sisi dan satu graf dengan lima belas sisi.

5.2 Saran

Adapun saran dari Tugas Akhir ini adalah untuk enumerasi graf yang tidak isomorfis, sebaiknya menggunakan graf yang tidak sederhana (graf yang mempunyai loop dan $n - graf$, untuk $n \geq 2$).

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kleiner, I.1986. *The Evolution of Group Theory: A Brief Survey.* Mathematics Magazine, Volume 59, No. 4.Hal.195-215.

[2] McWilliams,B., Donahue J. 2006. *Applications of Permutation Groups.*Abstract Algebra Lecture Note.

[3] Mahmudah, W. 2006. *Kajian Indeks Sikel Polinomial Grup dan Aplikasi Teorema Polya Pada Molekul Tetrahedron.* Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS Surabaya.

[4] Cattani, M. 2007. *Quantum Statitics: The Industinguishability Principle and The Permutation Group Theory.* Revista Brasileira de Ensino de Fisica, Volume 29, No.3, p.405-414.

[5] H. Fripertinger.1992. *Enumeration in Musical Theory.* Seminaire Lotharingien de Com-binatoire, 476/S-26:29 42.ISSN 0755-3390.

[6] Gunawan R., S.2003. *Aplikasi Teorema Polya Pada Enumerasi Graf Sederhana.* Jurnal Matematika dan Komputasi. 1(8):1 - 10.

[7] Rosalianti T. V., Suhery C., Kusumasti, N.2013. *Penggunaan Teorema Polya Dalam Menentukan Banyaknya Graf Sederhana yang Tidak Saling Isomorfis.* Buletin Ilmiah Mat.Stat. dan Terapannya. Volume 02, No.1 Hal 39-44.

[8] Khanna, Vijay K.1993.*A Course in Abstract Algebra.* Vikas Publishing House PVT LTD, New Delhi.

[9] Fraleigh, John B.2002. *A First Course in Abstract Algebra*, 7th Edition. California: Addison Wesley Longman.

[10] Mulholland, Jamie.2015. diakses pada tanggal 16 Februari 2015. *Permutation Puzzles: A Mathematical Perspective.* http://people.math.sfu.ca/jtmulhol/math302/notes/22- Orbit-Stabilizer.pdf.

[11] D.H Smith, Jonathan.2008. *Introduction to Abstract Algebra.* CRC Press, Iowa U.S.A.

[12] Brualdi, Richard A.2009. *Introductory Combinatoric.* New York: Pearson Education Inc.

[13] Diestel R.1999. *Graph Theory.* New York: Springer-Verlag.

[14] Siang, J.J. 2002.*Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer.* Yogyakarta: ANDI

LAMPIRAN A
Elemen-elemen dari Grup Simetri S_6

1. ( )
2. (1 2)
3. (1 3)
4. (1 4)
5. (1 5)
6. (1 6)
7. (2 3)
8. (2 4)
9. (2 5)
10. (2 6)
11. (3 4)
12. (3 5)
13. (3 6)
14. (4 5)
15. (4 6)
16. (5 6)
17. (1 2 3)
18. (1 3 2)
19. (1 2 4)
20. (1 4 2)
21. (1 2 5)
22. (1 5 2)
23. (1 2 6)
24. (1 6 2)
25. (1 3 4)
26. (1 4 3)
27. (1 3 5)
28. (1 5 3)
29. (1 3 6)
30. (1 6 3)
31. (1 4 5)
32. (1 5 4)
33. (1 4 6)
34. (1 6 4)
35. (1 5 6)
36. (1 6 5)
37. (2 3 4)
38. (2 4 3)
39. (2 3 5)
40. (2 5 3)
41. (2 3 6)
42. (2 6 3)
43. (2 4 5)
44. (2 5 4)
45. (2 4 6)
46. (2 6 4)
47. (2 5 6)
48. (2 6 5)
49. (3 4 5)
50. (3 5 4)
51. (3 4 6)
52. (3 6 4)
53. (3 5 6)
54. (3 6 5)
55. (4 5 6)
56. (4 6 5)
57. (1 2)(3 4)
58. (1 2)(3 5)
59. (1 2)(3 6)
60. (1 2)(4 5)
61. (1 2)(4 6)
62. (1 2)(5 6)
63. (1 3)(2 4)
64. (1 3)(2 5)

65. (1 3)(2 6)
66. (1 3)(4 5)
67. (1 3)(4 6)
68. (1 3)(5 6)
69. (1 4)(2 3)
70. (1 4)(2 5)
71. (1 4)(2 6)
72. (1 4)(3 5)
73. (1 4)(3 6)
74. (1 4)(5 6)
75. (1 5)(2 3)
76. (1 5)(2 4)
77. (1 5)(2 6)
78. (1 5)(3 4)
79. (1 5)(3 6)
80. (1 5)(4 6)
81. (1 6)(2 3)
82. (1 6)(2 4)
83. (1 6)(2 5)
84. (1 6)(3 4)
85. (1 6)(3 5)
86. (1 6)(4 5)
87. (2 3)(4 5)
88. (2 3)(4 6)
89. (2 3)(5 6)
90. (2 4)(3 5)
91. (2 4)(3 6)
92. (2 4)(5 6)
93. (2 5)(3 4)
94. (2 5)(3 6)
95. (2 5)(4 6)
96. (2 6)(3 4)
97. (2 6)(3 5)
98. (2 6)(4 5)
99. (3 4)(5 6)
100. (3 5)(4 6)
101. (3 6)(4 5)
102. (1 2 3 4)
103. (1 2 4 3)
104. (1 3 2 4)
105. (1 3 4 2)
106. (1 4 2 3)
107. (1 4 3 2)
108. (1 2 3 5)
109. (1 2 5 3)
110. (1 3 2 5)
111. (1 3 5 2)
112. (1 5 2 3)
113. (1 5 3 2)
114. (1 2 3 6)
115. (1 2 6 3)
116. (1 3 2 6)
117. (1 3 6 2)
118. (1 6 2 3)
119. (1 6 3 2)
120. (1 2 4 5)
121. (1 2 5 4)
122. (1 4 2 5)
123. (1 4 5 2)
124. (1 5 2 4)
125. (1 5 4 2)
126. (1 2 4 6)
127. (1 2 6 4)
128. (1 4 2 6)
129. (1 4 6 2)
130. (1 6 2 4)
131. (1 6 4 2)
132. (1 2 5 6)
133. (1 2 6 5)
134. (1 5 2 6)

135. (1 5 6 2)
136. (1 6 2 5)
137. (1 6 5 2)
138. (1 3 4 5)
139. (1 3 5 4)
140. (1 4 3 5)
141. (1 4 5 3)
142. (1 5 3 4)
143. (1 5 4 3)
144. (1 3 4 6)
145. (1 3 6 4)
146. (1 4 3 6)
147. (1 4 6 3)
148. (1 6 3 4)
149. (1 6 4 3)
150. (1 3 5 6)
151. (1 3 6 5)
152. (1 5 3 6)
153. (1 5 6 3)
154. (1 6 3 5)
155. (1 6 5 3)
156. (1 4 5 6)
157. (1 4 6 5)
158. (1 5 4 6)
159. (1 5 6 4)
160. (1 6 4 5)
161. (1 6 5 4)
162. (2 3 4 5)
163. (2 3 5 4)
164. (2 4 3 5)
165. (2 4 5 3)
166. (2 5 3 4)
167. (2 5 4 3)
168. (2 3 4 6)
169. (2 3 6 4)
170. (2 4 3 6)
171. (2 4 6 3)
172. (2 6 3 4)
173. (2 6 4 3)
174. (2 3 5 6)
175. (2 3 6 5)
176. (2 5 3 6)
177. (2 5 6 3)
178. (2 6 3 5)
179. (2 6 5 3)
180. (2 4 5 6)
181. (2 4 6 5)
182. (2 5 4 6)
183. (2 5 6 4)
184. (2 6 4 5)
185. (2 6 5 4)
186. (3 4 5 6)
187. (3 4 6 5)
188. (3 5 4 6)
189. (3 5 6 4)
190. (3 6 4 5)
191. (3 6 5 4)
192. (1 2)(3 4 5)
193. (1 2)(3 5 4)
194. (1 2)(3 4 6)
195. (1 2)(3 6 4)
196. (1 2)(3 5 6)
197. (1 2)(3 6 5)
198. (1 2)(4 5 6)
199. (1 2)(4 6 5)
200. (1 3)(2 4 5)
201. (1 3)(2 5 4)
202. (1 3)(2 4 6)
203. (1 3)(2 6 4)
204. (1 3)(2 5 6)

205. (1 3)(2 6 5)
206. (1 3)(4 5 6)
207. (1 3)(4 6 5)
208. (1 4)(2 3 5)
209. (1 4)(2 5 3)
210. (1 4)(2 3 6)
211. (1 4)(2 6 3)
212. (1 4)(2 5 6)
213. (1 4)(2 6 5)
214. (1 4)(3 5 6)
215. (1 4)(3 6 5)
216. (1 5)(2 3 4)
217. (1 5)(2 4 3)
218. (1 5)(2 3 6)
219. (1 5)(2 6 3)
220. (1 5)(2 4 6)
221. (1 5)(2 6 4)
222. (1 5)(3 4 6)
223. (1 5)(3 6 4)
224. (1 6)(2 3 4)
225. (1 6)(2 4 3)
226. (1 6)(2 3 5)
227. (1 6)(2 5 3)
228. (1 6)(2 4 5)
229. (1 6)(2 5 4)
230. (1 6)(3 4 5)
231. (1 6)(3 5 4)
232. (2 3)(1 4 5)
233. (2 3)(1 5 4)
234. (2 3)(1 4 6)
235. (2 3)(1 6 4)
236. (2 3)(1 5 6)
237. (2 3)(1 6 5)
238. (2 3)(4 5 6)
239. (2 3)(4 6 5)
240. (2 4)(1 3 5)
241. (2 4)(1 5 3)
242. (2 4)(1 3 6)
243. (2 4)(1 6 3)
244. (2 4)(1 5 6)
245. (2 4)(1 6 5)
246. (2 4)(3 5 6)
247. (2 4)(3 6 5)
248. (2 5)(1 3 4)
249. (2 5)(1 4 3)
250. (2 5)(1 3 6)
251. (2 5)(1 6 3)
252. (2 5)(1 4 6)
253. (2 5)(1 6 4)
254. (2 5)(3 4 6)
255. (2 5)(3 6 4)
256. (2 6)(1 3 4)
257. (2 6)(1 4 3)
258. (2 6)(1 3 5)
259. (2 6)(1 5 3)
260. (2 6)(1 4 5)
261. (2 6)(1 5 4)
262. (2 6)(3 4 5)
263. (2 6)(3 5 4)
264. (3 4)(1 2 5)
265. (3 4)(1 5 2)
266. (3 4)(1 2 6)
267. (3 4)(1 6 2)
268. (3 4)(1 5 6)
269. (3 4)(1 6 5)
270. (3 4)(2 5 6)
271. (3 4)(2 6 5)
272. (3 5)(1 2 4)
273. (3 5)(1 4 2)
274. (3 5)(1 2 6)

275. (3 5)(1 6 2)
276. (3 5)(1 4 6)
277. (3 5)(1 6 4)
278. (3 5)(2 4 6)
279. (3 5)(2 6 4)
280. (3 6)(1 2 4)
281. (3 6)(1 4 2)
282. (3 6)(1 2 5)
283. (3 6)(1 5 2)
284. (3 6)(1 4 5)
285. (3 6)(1 5 4)
286. (3 6)(2 4 5)
287. (3 6)(2 5 4)
288. (4 5)(1 2 3)
289. (4 5)(1 3 2)
290. (4 5)(1 2 6)
291. (4 5)(1 6 2)
292. (4 5)(1 3 6)
293. (4 5)(1 6 3)
294. (4 5)(2 3 6)
295. (4 5)(2 6 3)
296. (4 6)(1 2 3)
297. (4 6)(1 3 2)
298. (4 6)(1 2 5)
299. (4 6)(1 5 2)
300. (4 6)(1 3 5)
301. (4 6)(1 5 3)
302. (4 6)(2 3 5)
303. (4 6)(2 5 3)
304. (5 6)(1 2 3)
305. (5 6)(1 3 2)
306. (5 6)(1 2 4)
307. (5 6)(1 4 2)
308. (5 6)(1 3 4)
309. (5 6)(1 4 3)
310. (5 6)(2 3 4)
311. (5 6)(2 4 3)
312. (1 2 3 4 5)
313. (1 2 3 5 4)
314. (1 2 4 3 5)
315. (1 2 4 5 3)
316. (1 2 5 3 4)
317. (1 2 5 4 3)
318. (1 3 2 4 5)
319. (1 3 2 5 4)
320. (1 3 4 2 5)
321. (1 3 4 5 2)
322. (1 3 5 2 4)
323. (1 3 5 4 2)
324. (1 4 2 3 5)
325. (1 4 2 5 3)
326. (1 4 3 2 5)
327. (1 4 3 5 2)
328. (1 4 5 2 3)
329. (1 4 5 3 2)
330. (1 5 2 3 4)
331. (1 5 2 4 3)
332. (1 5 3 2 4)
333. (1 5 3 4 2)
334. (1 5 4 2 3)
335. (1 5 4 3 2)
336. (1 2 3 4 6)
337. (1 2 3 6 4)
338. (1 2 4 3 6)
339. (1 2 4 6 3)
340. (1 2 6 3 4)
341. (1 2 6 4 3)
342. (1 3 2 4 6)
343. (1 3 2 6 4)
344. (1 3 4 2 6)

345. (1 3 4 6 2)
346. (1 3 6 2 4)
347. (1 3 6 4 2)
348. (1 4 2 3 6)
349. (1 4 2 6 3)
350. (1 4 3 2 6)
351. (1 4 3 6 2)
352. (1 4 6 2 3)
353. (1 4 6 3 2)
354. (1 6 2 3 4)
355. (1 6 2 4 3)
356. (1 6 3 2 4)
357. (1 6 3 4 2)
358. (1 6 4 2 3)
359. (1 6 4 3 2)
360. (1 2 3 5 6)
361. (1 2 3 6 5)
362. (1 2 5 3 6)
363. (1 2 5 6 3)
364. (1 2 6 3 5)
365. (1 2 6 5 3)
366. (1 3 2 5 6)
367. (1 3 2 6 5)
368. (1 3 5 2 6)
369. (1 3 5 6 2)
370. (1 3 6 2 5)
371. (1 3 6 5 2)
372. (1 5 2 3 6)
373. (1 5 2 6 3)
374. (1 5 3 2 6)
375. (1 5 3 6 2)
376. (1 5 6 2 3)
377. (1 5 6 3 2)
378. (1 6 2 3 5)
379. (1 6 2 5 3)
380. (1 6 3 2 5)
381. (1 6 3 5 2)
382. (1 6 5 2 3)
383. (1 6 5 3 2)
384. (1 2 4 5 6)
385. (1 2 4 6 5)
386. (1 2 5 4 6)
387. (1 2 5 6 4)
388. (1 2 6 4 5)
389. (1 2 6 5 4)
390. (1 4 2 5 6)
391. (1 4 2 6 5)
392. (1 4 5 2 6)
393. (1 4 5 6 2)
394. (1 4 6 2 5)
395. (1 4 6 5 2)
396. (1 5 2 4 6)
397. (1 5 2 6 4)
398. (1 5 4 2 6)
399. (1 5 4 6 2)
400. (1 5 6 2 4)
401. (1 5 6 4 2)
402. (1 6 2 4 5)
403. (1 6 2 5 4)
404. (1 6 4 2 5)
405. (1 6 4 5 2)
406. (1 6 5 2 4)
407. (1 6 5 4 2)
408. (1 3 4 5 6)
409. (1 3 4 6 5)
410. (1 3 5 4 6)
411. (1 3 5 6 4)
412. (1 3 6 4 5)
413. (1 3 6 5 4)
414. (1 4 3 5 6)

415. (1 4 3 6 5)
416. (1 4 5 3 6)
417. (1 4 5 6 3)
418. (1 4 6 3 5)
419. (1 4 6 5 3)
420. (1 5 3 4 6)
421. (1 5 3 6 4)
422. (1 5 4 3 6)
423. (1 5 4 6 3)
424. (1 5 6 3 4)
425. (1 5 6 4 3)
426. (1 6 3 4 5)
427. (1 6 3 5 4)
428. (1 6 4 3 5)
429. (1 6 4 5 3)
430. (1 6 5 3 4)
431. (1 6 5 4 3)
432. (2 3 4 5 6)
433. (2 3 4 6 5)
434. (2 3 5 4 6)
435. (2 3 5 6 4)
436. (2 3 6 4 5)
437. (2 3 6 5 4)
438. (2 4 3 5 6)
439. (2 4 3 6 5)
440. (2 4 5 3 6)
441. (2 4 5 6 3)
442. (2 4 6 3 5)
443. (2 4 6 5 3)
444. (2 5 3 4 6)
445. (2 5 3 6 4)
446. (2 5 4 3 6)
447. (2 5 4 6 3)
448. (2 5 6 3 4)
449. (2 5 6 4 3)
450. (2 6 3 4 5)
451. (2 6 3 5 4)
452. (2 6 4 3 5)
453. (2 6 4 5 3)
454. (2 6 5 3 4)
455. (2 6 5 4 3)
456. (1 2)(3 4 5 6)
457. (1 2)(3 4 6 5)
458. (1 2)(3 5 4 6)
459. (1 2)(3 5 6 4)
460. (1 2)(3 6 4 5)
461. (1 2)(3 6 5 4)
462. (1 3)(2 4 5 6)
463. (1 3)(2 4 6 5)
464. (1 3)(2 5 4 6)
465. (1 3)(2 5 6 4)
466. (1 3)(2 6 4 5)
467. (1 3)(2 6 5 4)
468. (1 4)(2 3 5 6)
469. (1 4)(2 3 6 5)
470. (1 4)(2 5 3 6)
471. (1 4)(2 5 6 3)
472. (1 4)(2 6 3 5)
473. (1 4)(2 6 5 3)
474. (1 5)(2 3 4 6)
475. (1 5)(2 3 6 4)
476. (1 5)(2 4 3 6)
477. (1 5)(2 4 6 3)
478. (1 5)(2 6 3 4)
479. (1 5)(2 6 4 3)
480. (1 6)(2 3 4 5)
481. (1 6)(2 3 5 4)
482. (1 6)(2 4 3 5)
483. (1 6)(2 4 5 3)
484. (1 6)(2 5 3 4)

485. (1 6)(2 5 4 3)
486. (2 3)(1 4 5 6)
487. (2 3)(1 4 6 5)
488. (2 3)(1 5 4 6)
489. (2 3)(1 5 6 4)
490. (2 3)(1 6 4 5)
491. (2 3)(1 6 5 4)
492. (2 4)(1 3 5 6)
493. (2 4)(1 3 6 5)
494. (2 4)(1 5 3 6)
495. (2 4)(1 5 6 3)
496. (2 4)(1 6 3 5)
497. (2 4)(1 6 5 3)
498. (2 5)(1 3 4 6)
499. (2 5)(1 3 6 4)
500. (2 5)(1 4 3 6)
501. (2 5)(1 4 6 3)
502. (2 5)(1 6 3 4)
503. (2 5)(1 6 4 3)
504. (2 6)(1 3 4 5)
505. (2 6)(1 3 5 4)
506. (2 6)(1 4 3 5)
507. (2 6)(1 4 5 3)
508. (2 6)(1 5 3 4)
509. (2 6)(1 5 4 3)
510. (3 4)(1 2 5 6)
511. (3 4)(1 2 6 5)
512. (3 4)(1 5 2 6)
513. (3 4)(1 5 6 2)
514. (3 4)(1 6 2 5)
515. (3 4)(1 6 5 2)
516. (3 5)(1 2 4 6)
517. (3 5)(1 2 6 4)
518. (3 5)(1 4 2 6)
519. (3 5)(1 4 6 2)
520. (3 5)(1 6 2 4)
521. (3 5)(1 6 4 2)
522. (3 6)(1 2 4 5)
523. (3 6)(1 2 5 4)
524. (3 6)(1 4 2 5)
525. (3 6)(1 4 5 2)
526. (3 6)(1 5 2 4)
527. (3 6)(1 5 4 2)
528. (4 5)(1 2 3 6)
529. (4 5)(1 2 6 3)
530. (4 5)(1 3 2 6)
531. (4 5)(1 3 6 2)
532. (4 5)(1 6 2 3)
533. (4 5)(1 6 3 2)
534. (4 6)(1 2 3 5)
535. (4 6)(1 2 5 3)
536. (4 6)(1 3 2 5)
537. (4 6)(1 3 5 2)
538. (4 6)(1 5 2 3)
539. (4 6)(1 5 3 2)
540. (5 6)(1 2 3 4)
541. (5 6)(1 2 4 3)
542. (5 6)(1 3 2 4)
543. (5 6)(1 3 4 2)
544. (5 6)(1 4 2 3)
545. (5 6)(1 4 3 2)
546. (1 2 3)(4 5 6)
547. (1 2 3)(4 6 5)
548. (1 3 2)(4 5 6)
549. (1 3 2)(4 6 5)
550. (1 2 4)(3 5 6)
551. (1 2 4)(3 6 5)
552. (1 4 2)(3 5 6)
553. (1 4 2)(3 6 5)
554. (1 2 5)(3 4 6)

555. (1 2 5)(3 6 4)
556. (1 5 2)(3 4 6)
557. (1 5 2)(3 6 4)
558. (1 2 6)(3 4 5)
559. (1 2 6)(3 5 4)
560. (1 6 2)(3 4 5)
561. (1 6 2)(3 5 4)
562. (1 3 4)(2 5 6)
563. (1 3 4)(2 6 5)
564. (1 4 3)(2 5 6)
565. (1 4 3)(2 6 5)
566. (1 3 5)(2 4 6)
567. (1 3 5)(2 6 4)
568. (1 5 3)(2 4 6)
569. (1 5 3)(2 6 4)
570. (1 3 6)(2 4 5)
571. (1 3 6)(2 5 4)
572. (1 6 3)(2 4 5)
573. (1 6 3)(2 5 4)
574. (1 4 5)(2 3 6)
575. (1 4 5)(2 6 3)
576. (1 5 4)(2 3 6)
577. (1 5 4)(2 6 3)
578. (1 4 6)(2 3 5)
579. (1 4 6)(2 5 3)
580. (1 6 4)(2 3 5)
581. (1 6 4)(2 5 3)
582. (1 5 6)(2 3 4)
583. (1 5 6)(2 4 3)
584. (1 6 5)(2 3 4)
585. (1 6 5)(2 4 3)
586. (1 2)(3 4)(5 6)
587. (1 2)(3 5)(4 6)
588. (1 2)(3 6)(4 5)
589. (1 3)(2 4)(5 6)
590. (1 3)(2 5)(4 6)
591. (1 3)(2 6)(4 5)
592. (1 4)(2 3)(5 6)
593. (1 4)(2 5)(3 6)
594. (1 4)(2 6)(3 5)
595. (1 5)(2 3)(4 6)
596. (1 5)(2 4)(3 6)
597. (1 5)(2 6)(3 4)
598. (1 6)(2 3)(4 5)
599. (1 6)(2 4)(3 5)
600. (1 6)(2 5)(3 4)
601. (1 2 3 4 5 6)
602. (1 2 3 4 6 5)
603. (1 2 3 5 4 6)
604. (1 2 3 5 6 4)
605. (1 2 3 6 4 5)
606. (1 2 3 6 5 4)
607. (1 2 4 3 5 6)
608. (1 2 4 3 6 5)
609. (1 2 4 5 3 6)
610. (1 2 4 5 6 3)
611. (1 2 4 6 3 5)
612. (1 2 4 6 5 3)
613. (1 2 5 3 4 6)
614. (1 2 5 3 6 4)
615. (1 2 5 4 3 6)
616. (1 2 5 4 6 3)
617. (1 2 5 6 3 4)
618. (1 2 5 6 4 3)
619. (1 2 6 3 4 5)
620. (1 2 6 3 5 4)
621. (1 2 6 4 3 5)
622. (1 2 6 4 5 3)
623. (1 2 6 5 3 4)
624. (1 2 6 5 4 3)

625. (1 3 2 4 5 6)
626. (1 3 2 4 6 5)
627. (1 3 2 5 4 6)
628. (1 3 2 5 6 4)
629. (1 3 2 6 4 5)
630. (1 3 2 6 5 4)
631. (1 3 4 2 5 6)
632. (1 3 4 2 6 5)
633. (1 3 4 5 2 6)
634. (1 3 4 5 6 2)
635. (1 3 4 6 2 5)
636. (1 3 4 6 5 2)
637. (1 3 5 2 4 6)
638. (1 3 5 2 6 4)
639. (1 3 5 4 2 6)
640. (1 3 5 4 6 2)
641. (1 3 5 6 2 4)
642. (1 3 5 6 4 2)
643. (1 3 6 2 4 5)
644. (1 3 6 2 5 4)
645. (1 3 6 4 2 5)
646. (1 3 6 4 5 2)
647. (1 3 6 5 2 4)
648. (1 3 6 5 4 2)
649. (1 4 2 3 5 6)
650. (1 4 2 3 6 5)
651. (1 4 2 5 3 6)
652. (1 4 2 5 6 3)
653. (1 4 2 6 3 5)
654. (1 4 2 6 5 3)
655. (1 4 3 2 5 6)
656. (1 4 3 2 6 5)
657. (1 4 3 5 2 6)
658. (1 4 3 5 6 2)
659. (1 4 3 6 2 5)
660. (1 4 3 6 5 2)
661. (1 4 5 2 3 6)
662. (1 4 5 2 6 3)
663. (1 4 5 3 2 6)
664. (1 4 5 3 6 2)
665. (1 4 5 6 2 3)
666. (1 4 5 6 3 2)
667. (1 4 6 2 3 5)
668. (1 4 6 2 5 3)
669. (1 4 6 3 2 5)
670. (1 4 6 3 5 2)
671. (1 4 6 5 2 3)
672. (1 4 6 5 3 2)
673. (1 5 2 3 4 6)
674. (1 5 2 3 6 4)
675. (1 5 2 4 3 6)
676. (1 5 2 4 6 3)
677. (1 5 2 6 3 4)
678. (1 5 2 6 4 3)
679. (1 5 3 2 4 6)
680. (1 5 3 2 6 4)
681. (1 5 3 4 2 6)
682. (1 5 3 4 6 2)
683. (1 5 3 6 2 4)
684. (1 5 3 6 4 2)
685. (1 5 4 2 3 6)
686. (1 5 4 2 6 3)
687. (1 5 4 3 2 6)
688. (1 5 4 3 6 2)
689. (1 5 4 6 2 3)
690. (1 5 4 6 3 2)
691. (1 5 6 2 3 4)
692. (1 5 6 2 4 3)
693. (1 5 6 3 2 4)
694. (1 5 6 3 4 2)

695. (1 5 6 4 2 3)
696. (1 5 6 4 3 2)
697. (1 6 2 3 4 5)
698. (1 6 2 3 5 4)
699. (1 6 2 4 3 5)
700. (1 6 2 4 5 3)
701. (1 6 2 5 3 4)
702. (1 6 2 5 4 3)
703. (1 6 3 2 4 5)
704. (1 6 3 2 5 4)
705. (1 6 3 4 2 5)
706. (1 6 3 4 5 2)
707. (1 6 3 5 2 4)
708. (1 6 3 5 4 2)
709. (1 6 4 2 3 5)
710. (1 6 4 2 5 3)
711. (1 6 4 3 2 5)
712. (1 6 4 3 5 2)
713. (1 6 4 5 2 3)
714. (1 6 4 5 3 2)
715. (1 6 5 2 3 4)
716. (1 6 5 2 4 3)
717. (1 6 5 3 2 4)
718. (1 6 5 3 4 2)
719. (1 6 5 4 2 3)
720. (1 6 5 4 3 2)

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

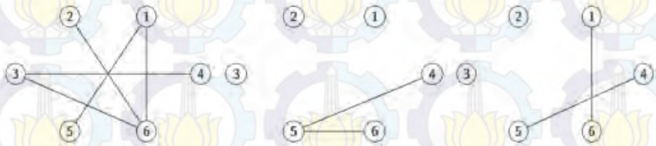
LAMPIRAN B

Bentuk-bentuk dari Graf Sederhana dengan Enam Simpul yang tidak Saling Isomorfis

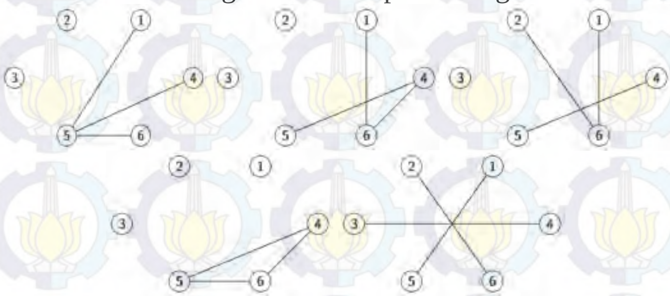
1. Graf sederhana dengan enam simpul dan tanpa sisi

2. Graf sederhana dengan enam simpul dan satu sisi

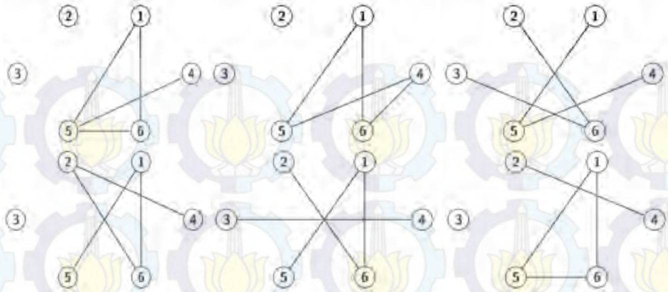
3. Graf sederhana dengan enam simpul dan dua sisi



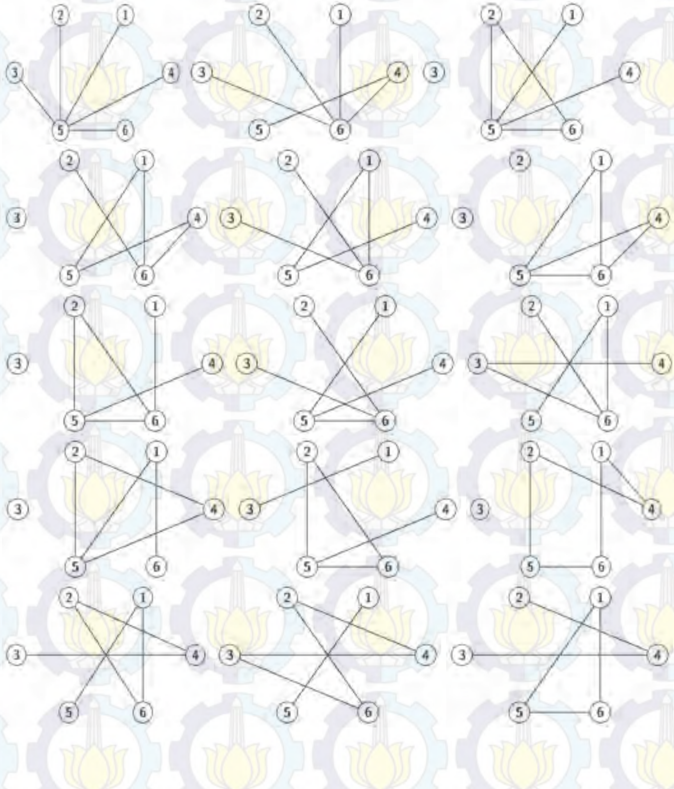
4. Graf sederhana dengan enam simpul dan tiga sisi



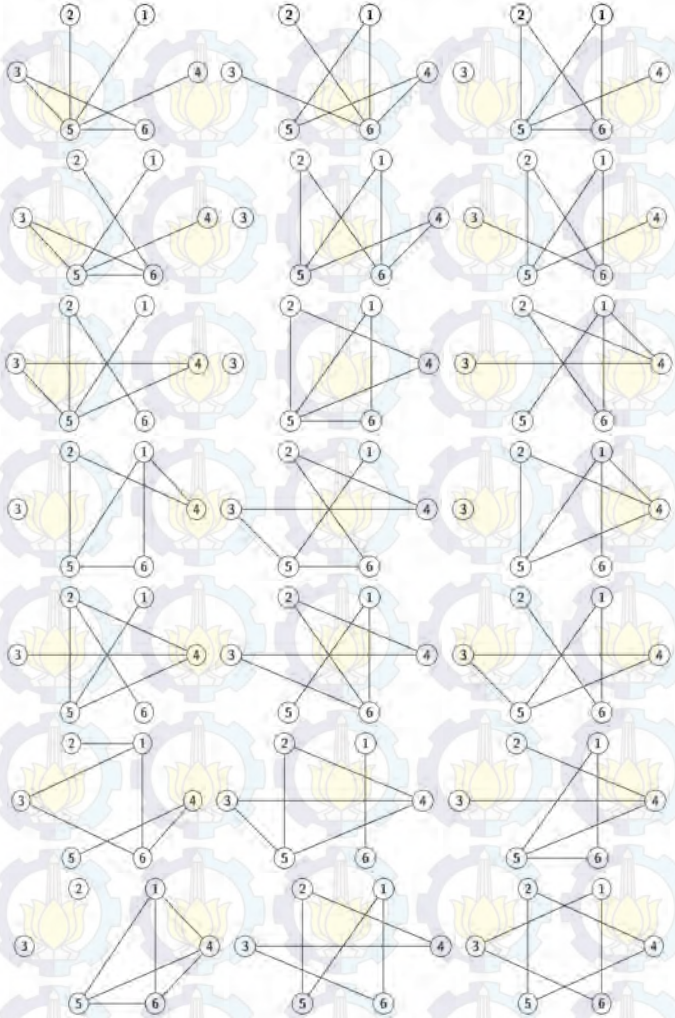
5. Graf sederhana dengan enam simpul dan empat sisi



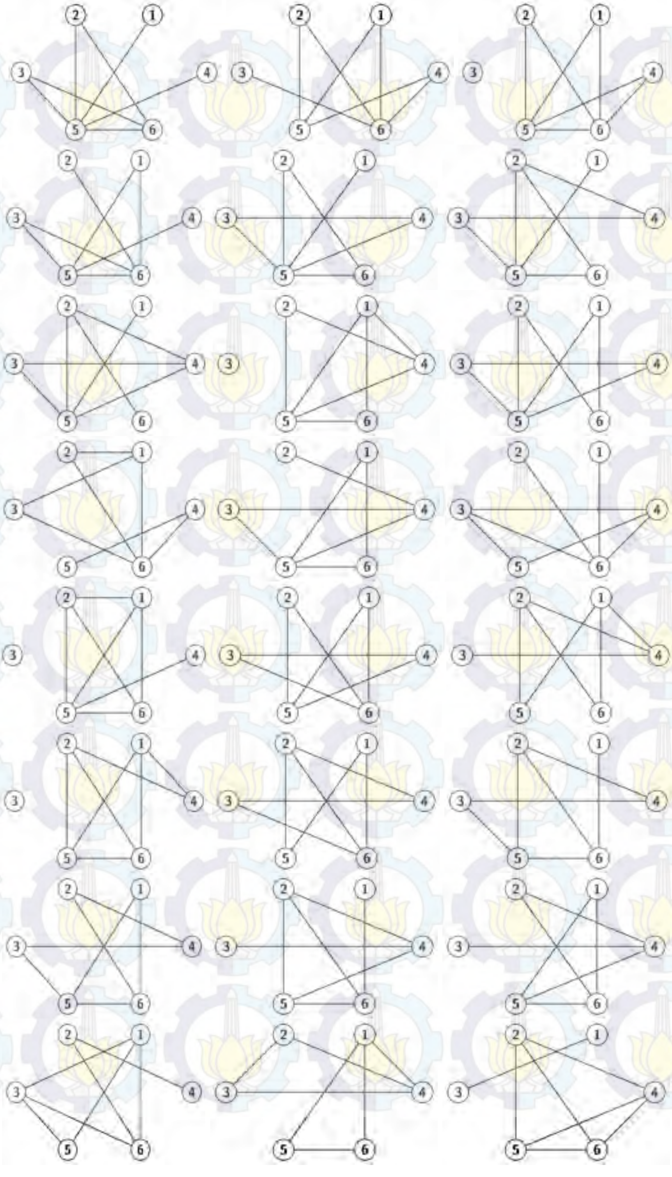
6. Graf sederhana dengan enam simpul dan lima sisi



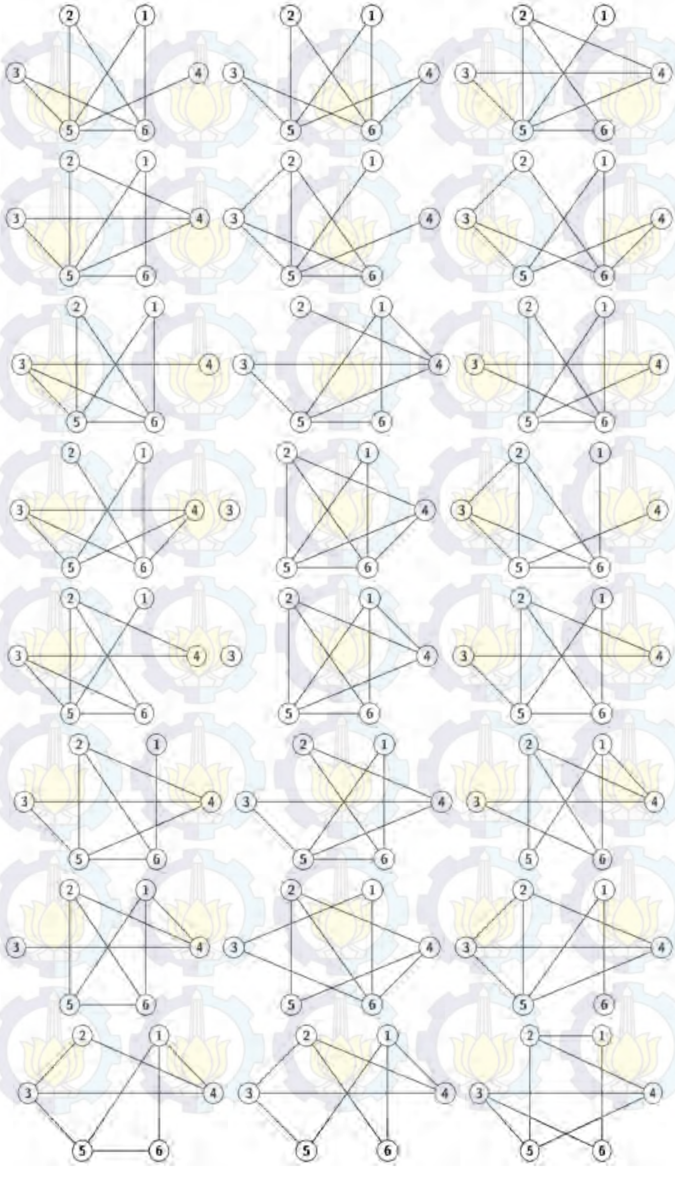
7. Graf sederhana dengan enam simpul dan enam sisi



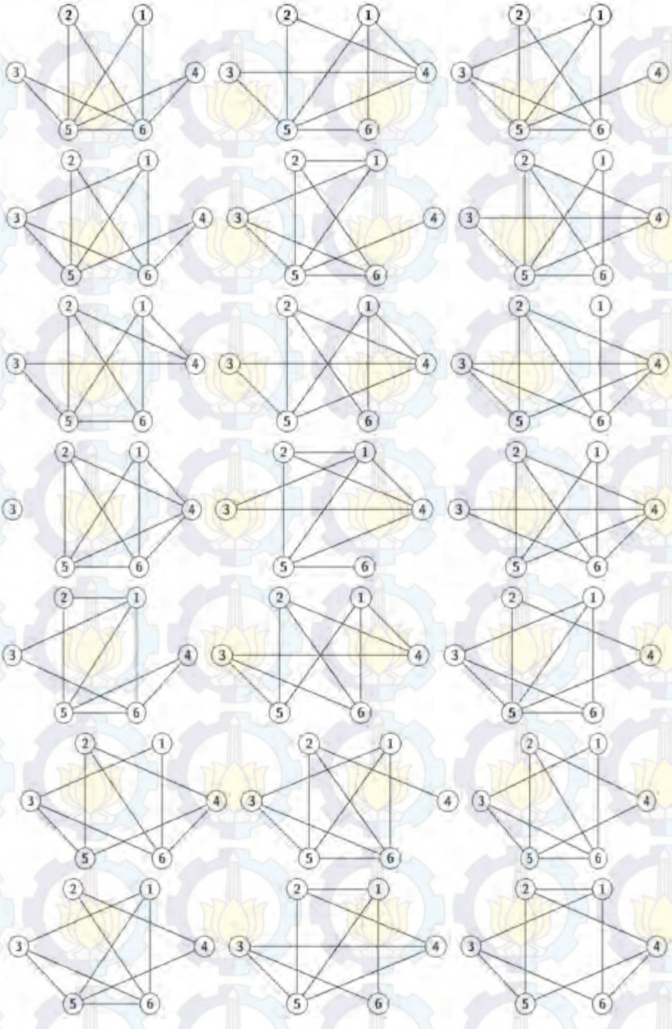
8. Graf sederhana dengan enam simpul dan tujuh sisi



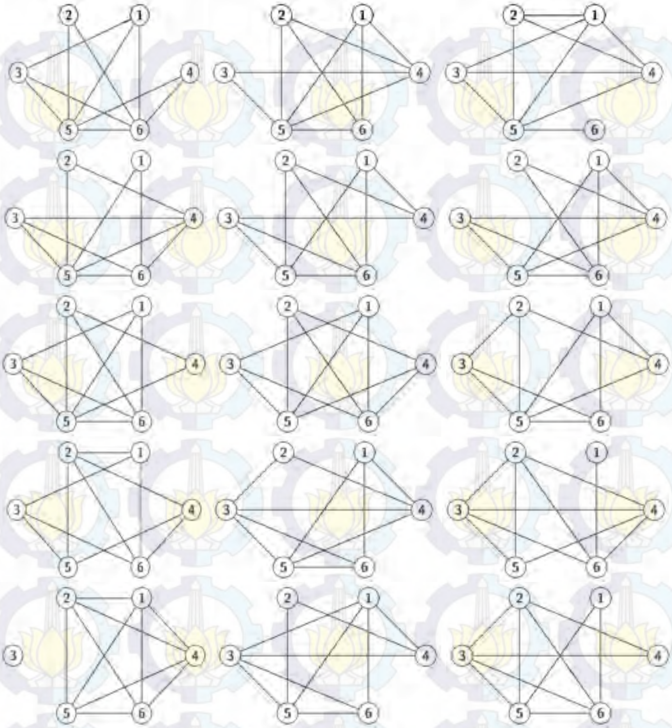
9. Graf sederhana dengan enam simpul dan delapan sisi



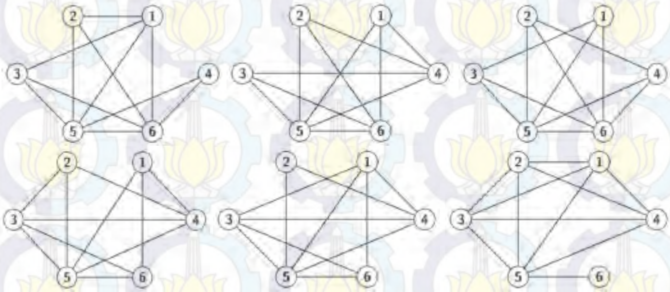
10. Graf sederhana dengan enam simpul dan sembilan sisi

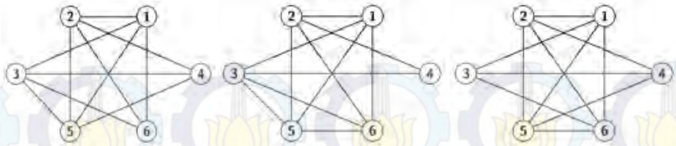


11. Graf sederhana dengan enam simpul dan sepuluh sisi

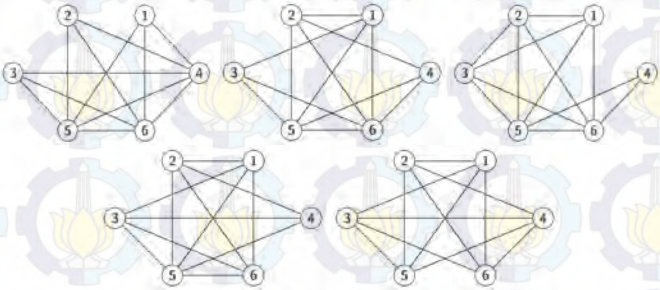


12. Graf sederhana dengan enam simpul dan sebelas sisi





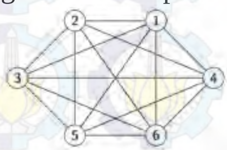
13. Graf sederhana dengan enam simpul dan dua belas sisi



14. Graf sederhana dengan enam simpul dan tiga belas sisi

15. Graf sederhana dengan enam simpul dan empat belas sisi

16. Graf sederhana dengan enam simpul dan lima belas sisi



BIODATA PENULIS

Penulis memiliki nama lengkap Ahmad Jamil, lahir di Pasuruan, 13 Desember 1994. Penulis adalah anak kedua dari 2 bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal dimulai dari MI Maarif NU Nogosari Pandaan (1999-2005), SMP Maarif NU Pandaan (2005-2008), dan SMA Maarif NU Pandaan (2008-2011). Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya melalui jalur SNMPTN Undangan dengan NRP 1211 100 039. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Analisis dan Aljabar. Selama menempuh pendidikan di ITS, penulis juga aktif berorganisasi di Lembaga Dakwah Jurusan Matematika ITS, Ibnu Muqlah sebagai staf Departemen Syiar (2013-2014) dan HIMATIKA ITS sebagai kabiro olimpiade (2013-2014). Disamping itu, pada semester III sampai semester VIII penulis terdaftar sebagai asisten dosen matakuliah kalkukus I dan kalkulus II.

Adapun untuk informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email ahmadjamil950@yahoo.co.id

Enumerasi Graf Sederhana dengan Enam Simpul Menggunakan Teorema Polya

Ahmad Jamil dan Soleha
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: seha_07@matematika.its.ac.id

***Abstrak*— Salah satu dari dari masalah yang sering muncul dalam matematika adalah masalah enumerasi atau pencacahan objek dari suatu pengaturan. Seperti diketahui, dari beberapa permasalahan matematika yang rumit terkait pada masalah enumerasi tersebut. Hal ini lebih dikarenakan permasalahan konspetual yaitu ketika objek berbeda dapat dipandang sama (isomorfis). Selain grup permutasi, penyelesaian permasalahan enumerasi juga melibatkan Teorema Polya I dan Teorema Polya II. Teorema Polya I digunakan untuk menentukan banyaknya objek yang tidak isomorfis sedangkan Teorema Polya II digunakan untuk menentukan bentuk-bentuk objek yang tidak isomorfis tersebut. Beberapa tahun terakhir dilakukan penelitian terkait permasalahan enumerasi pada graf sederhana. Lebih detailnya, permasalahan mengenai banyaknya graf sederhana dengan empat (lima) simpul yang tidak isomorfis menggunakan konsep grup simetri $S_4(S_5)$, Teorema Polya I serta Teorema Polya II sehingga diperoleh hasil sebelas dan tiga puluh lima graf sederhana yang tidak saling isomorfis. Pada Penelitian ini diselidiki banyaknya graf sederhana dengan enam simpul yang tidak isomorfis menggunakan konsep grup simetri S_6, Teorema Polya I serta Teorema Polya II sehingga diperoleh hasil seratus lima puluh enam graf sederhana yang tidak saling isomorfis.**

Kata Kunci: Enumerasi, Graf Sederhana, Grup Permutasi, , Isomorfis, Teorema Polya.

I. PENDAHULUAN

Salah satu cabang dari ilmu aljabar adalah aljabar abstrak. Dan salah satu bidang yang dipelajari dalam ilmu aljabar abstrak adalah grup. Grup merupakan ilmu yang dikembangkan berdasarkan empat bidang utama yaitu aljabar klasik yang dikembangkan oleh J.L. Lagrange pada tahun 1770, teori bilangan yang dikembangkan oleh C.F Gauss pada tahun 1801, geometri yang dikembangkan oleh F. Klein pada tahun 1872 dan analisis yang dikembangkan oleh S.Lie pada tahun 1874 serta H.Pointcare dan F.Klein pada tahun 1876 [1]. Salah satu dari bentuk grup adalah grup permutasi. Grup permutasi merupakan pengembangan dari aljabar klasik. Grup permutasi adalah sebuah grup yang elemen-elemennya merupakan permutasi dari suatu himpunan dengan operasi komposisi. Salah satu contoh dari grup permutasi adalah grup simetri. Banyak sekali aplikasi grup permutasi dibidang matematika selain aljabar yaitu aplikasi dibidang analisis, geometri, kombinatorik [2] dan bidang lain yaitu kimia [3], fisika [4] maupun musik [5].

Salah satu penggunaan konsep grup permutasi berhubungan dengan penyelesaian permasalahan enumerasi. Enumerasi dalam hal ini adalah penghitungan atau pencacahan dari suatu pengaturan [3]. Seperti diketahui, dari beberapa permasalahan matematika yang rumit terkait pada enumerasi tersebut. Hal ini lebih dikarenakan permasalahan konspetual yaitu ketika objek berbeda dapat dipandang sama (isomorfis). Salah satu penyelesaian masalah enumerasi adalah dengan menggunakan Teorema Polya.

Graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika diskrit. Graf adalah pasangan himpunan yang terdiri dari himpunan titik yang tak kosong dan himpunan garis yang mungkin kosong atau himpunan berhingga pasangan tak terurut dari elemen-elemen pada himpunan titik-titiknya. Graf sederhana adalah graf yang tidak memilki sisi ganda dan loop. Graf sederhana $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dikatakan isomorfis jika terdapat fungsi bijektif $f: V_1 \to V_2$ dengan sifat $a, b \in V_1$ bertetangga jika dan hanya jika $f(a), f(b) \in V_2$ bertetangga, untuk setiap $a, b \in V_1$. Masalah enumerasi pada graf yang tidak isomorfis merupakan masalah yang tidak mudah karena kita harus bisa menemukan satu per satu graf yang tidak isomorfis dan menentukan bentuk dari graf yang tidak isomorfis tersebut. Salah satu penyelesaian masalah enumerasi pada graf adalah penggunaan Teorema Polya. Teorema Polya I menjelaskan banyaknya graf yang tidak isomorfis dan Teorema

Polya II menjelaskan bentuk-bentuk graf yang tidak isomorfis tersebut.

Dalam penelitian yang lain, Teorema Polya dapat digunakan dalam menentukan graf sederhana dengan empat simpul yang tidak saling isomorfis [6] dan lima simpul yang tidak saling isomorfis [7]. Oleh sebab itu, penelitian Tugas Akhir ini melanjutkan penentuan banyaknya graf sederhana dengan enam simpul yang tidak saling isomorfis. Pada dasarnya Tugas Akhir ini merupakan penggabungan dari ilmu graf dan teori grup. Teori grup yang digunakan adalah teori grup permutasi dan grup *Action*.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan disajikan konsep dasar mengenai grup permutasi, Teorema Burnside, indeks sikel, dan graf sederhana.

2.1 Grup Permutasi

Pada bagian ini akan dibahas mengenai permutasi dan grup yang berhubungan dengan permutasi-permutasi tersebut.

Definisi 2.1.1.[8] *Jika himpunan* $A \neq \emptyset$, *untuk setiap fungsi* $f: A \to A$ *dan* f *bijektif, maka* f *disebut permutasi dari himpunan A.*

Contoh 2.1.2.

Misalkan himpunan $A = \{1,2,3\}$ dan terdapat fungsi sedemikian hingga $f(1) = 2, f(2) = 3$ dan $f(3) = 1$, atau dapat ditulis $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ maka f disebut permutasi karena f bijektif dan $f: A \to A$. Untuk selanjutnya, permutasi dalam bentuk $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dapat ditulis dalam bentuk $(1 \quad 2 \quad 3)$.

Himpunan permutasi dari A membentuk sebuah grup yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1.3.[9] *Jika A suatu himpunan, maka grup yang memuat semua permutasi dari A dinamakan grup simetri dan disimbolkan dengan* S_n. *Grup simetri* S_n *memuat elemen sebanyak* $n!$.

Pada bagian ini akan dibahas mengenai elemen-elemen dari grup simetri.

Definisi 2.1.4.[8] *Misalkan* S_n *adalah grup simetri. Jika terdapat bilangan positif m sedemikian hingga* $x,\ f(x), f^2(x), \dots, f^{m-1}(x)$ *semuanya berbeda dan* $f^m(x) = x$. *maka* $(x\ f(x)\ f^2(x)\ \dots\ f^{m-1}(x))$ *adalah sikel dari* f *dengan panjang m.*

Berikut ini akan dibahas mengenai beberapa subgrup dari grup simetri.

Definisi 2.1.5. [9] *Grup permutasi adalah himpunan dari sebarang permutasi-permutasi dari suatu himpunan berhingga A dengan operasi biner komposisi fungsi yang membentuk grup.*

Definisi 2.1.6.[8] *Grup dihedral adalah subgrup dari* S_n *yang anggotanya merupakan himpunan semua permutasi yang bersesuaian dengan rotasi dan refleksi dari segi-n beraturan dan Grup Dihedral memuat elemen sebanyak 2n.*

Definisi 2.1.7.[10] *Jika* G *adalah grup dan* X *adalah himpunan berhingga, maka grup Action* φ *kiri dari* G *pada* X *adalah fungsi:*

$$\varphi: G \times X \to X$$

Yang memenuhi dua sifat:

1. $(g.h).x = g.(h.x)$; $\forall g, h \in G$ *dan* $\forall x \in X$
2. $e.x = x$; $\forall x \in X$ *dengan* e *adalah elemen identitas dari grup* G

Dalam hal ini, X *disebut* $G - set$.

Pada bagian ini akan dibahas mengenai orbit dan titik tetap permutasi dari sebuah himpunan.

Definisi 2.1.8.[11] $Gx = \{g(x): g \in G\}$ *yaitu himpunan semua peta* $x \in X$ *oleh permutasi* g di G. Gx *disebut orbit* x *terhadap* G.

Definisi 2.1.9.[11] $F(g) = \{z \in X: g(z) = z\}$ *adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi* $g \in G$. *Himpunan* $F(g)$ *disebut titik tetap permutasi* g *di himpunan* X.

Pada bagian ini akan dibahas mengenai grup yang beraksi pada sebuah himpunan.

2.2 Teorema Burnside-Frobenius [11]

Misal X adalah $G - set$ dengan G dan X berhingga. Jika k adalah banyaknya orbit di X pada G, maka:

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| \tag{1}$$

Teorema Burnside-Frobenius dapat digunakan dalam pembuktian Teorema Polya I dan menghitung pola berdasarkan sifat kesimetrian.

2.3 Indeks Sikel [12]

Diberikan G adalah grup permutasi dengan order m dari suatu himpunan yang banyak anggotanya n dan $g \in G$adalah komposisi dari sikel-sikel yang disjoint yang terdiri dari sikel dengan panjang 1 sebanyak a_1, sikel dengan panjang 2 sebanyak a_2,…, sikel dengan panjang n sebanyak a_n yang memenuhi $1a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$, maka tipe permutasi dari g adalah $[a_1, a_2, \dots, a_3]$ dan indeks sikel g didefinisikan sebagai : $Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = {x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}{x_3}^{a_3} \dots {x_n}^{a_n}$.

Serta, indeks sikel dari grup G didefinisikan :

$$Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Contoh 2.3.1:

$q = (123) \in S_3$, permutasi q memiliki 1 sikel dengan panjang 3, sehingga tipe permutasi q adalah [0,0,1] dan indeks sikel q adalah ${x_1}^0{x_2}^0{x_3}^1 = x_3$.

2.4 Teori Graf

Definisi 2.4.1. [13] *Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan dari simpul-simpul tidak kosong dan E adalah himpunan dari sisi-sisi yang menghubungkan dua simpul dan mungkin kosong.*

Definisi 2.4.2.[14] *Dua buah graf G_1 dan G_2 dengan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dikatakan isomorfis jika terdapat fungsi bijektif $f: V_1 \to V_2$ dengan sifat $a, b \in V_1$ bertetangga jika dan hanya jika $f(a), f(b) \in V_2$ bertetangga, untuk setiap $a, b \in V_1$.*

Contoh 2.4.3 :

Gambar 2.1: Dua Graf yang Saling Isomorfis

dua graf pada Gambar 2.1 adalah dua graf yang saling isomorfis dengan fungsi bijektif
$f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 3, f(4) = 1,$
$f(5) = 6$ dan $f(6) = 2$.

III. METODOLOGI PENELITIAN

Dalam pengerjaan penelitian ini dilakukan beberapa tahapan, yaitu:

a. Studi Literatur
Pada tahap ini dilakukan pengumpulan referensi mengenai penggunaan Teorema Polya I dan II serta enumerasi graf yang tidak isomorfis melalui paper-paper dalam jurnal ilmiah maupun dalam buku-buku literatur.

b. Menguraikan grup simetri S_6
Pada tahap ini dilakukan penguraian semua elemen grup simetri S_6.

c. Mengelompokkan grup simetri S_6 berdasarkan indeks sikel.
Pada tahap ini dilakukan pengelompokkan elemen grup S_6 berdasarkan indeks sikelnya.

d. Membangkitkan indeks sikel yang baru
Pada tahap ini dilakukan penguraian indeks sikel yang baru (dari S_6 ke R_6).

e. Menghitung banyak pola
Pada tahap ini dilakukan penghitungan pola yang terbentuk menggunakan Teorema Polya I.

f. Menentukan jenis pola yang tidak isomorfis
Menentukan jenis pola yang tidak isomorfis menggunakan Teorema Polya II dan dengan bantuan software Maxima.

g. Menggambar jenis pola graf yang terbentuk dengan menggunakan software MikTex.

IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 Teorema Polya

4.1.1Teorema Polya I[12]

Diberikan $C = \{ f \mid f : X \to Y \}$dengan $|X| = n \geq 2$ dan $|Y| = r$. Jika G merupakan grup permutasi yang beraksi pada X dengan indeks siklik $Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ maka banyaknya pola di C terhadap G adalah $Z(G; r, r, r, \dots, r)$.

Bukti:

Jika $g \in G$, maka $f \in F(g) \Leftrightarrow f$ tetap oleh tiap-tiap sikel dari g. Dan jika g adalah permutasi bertipe $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ maka $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$menyatakan banyaknya sikel disjoint di g, sehingga banyaknya permutasi yang tetap oleh g adalah $r^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$. Jadi, diperoleh$|F(g)| = r^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ dengan $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ adalah tipe permutasi g. Berdasarkan Teorema Burnside, banyaknya orbit yang berbeda adalah

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{a_1} . r^{a_2} \dots r^{a_n}$$

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} z(g; r, r, \dots, r)$$

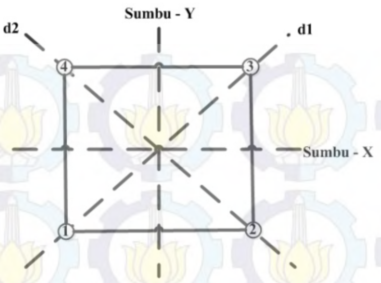
$$n = Z(G; r, r, \dots, r)$$

4.1.2 Teorema Polya II [13]

Persediaan pola warna , $PI\big(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r)\big)$ adalah merupakan indeks siklik dari $Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ pada $x_i = \big(w(y_1)\big)^i + \big(w(y_2)\big)^i + \big(w(y_3)\big)^i + \cdots + \big(w(y_r)\big)^i$ dengan $i = 1,2,3, \dots, n$

4.2 Perbedaan Penggunaan Teorema Burnside dan Teorema Polya I

Dalam Teorema Burnside, diperlukan orbit elemen dari masing-masing sikel grup untuk mementukan banyaknya pola yang mungkin, sedangkan dalam Teorema Polya I hanya memerlukan indeks sikel dari elemen-elemen grup untuk menghitung banyaknya pola. Berikut ini akan ditampilkan contoh antara perbedaan Teorema Polya dan Teorema Burnside.



Gambar 4.1: Persegi Beserta Sumbu Refleksinya

Berapa banyak cara mewarnai sudut dari persegi dengan tiga warna berbeda dan saling isomorfis ?

Penyelesaian

Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep grup Dehidral D_4. Dari Persamaan (1), akan dicari $F(g)$ atau titik tetap permutasi dari setiap elemen grup dehidral D_4. Misalkan $X = \{1,2,3,4\}$ adalah *G-set* dari grup dehidral D_4

Dengan menggunakan Teorema Burnside

a. $e = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)$

Maka, $|F(e)| = 3^4 = 81$

b. $r_1 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 2\ 3\ 4\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4)$

Maka, $|F(r_1)| = 3^1 = 3$

c. $r_2 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 3\ 4\ 1\ 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4)$

Maka, $|F(r_2)| = 3^2 = 9$

d. $r_3 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 4\ 1\ 2\ 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3\ 2)$

Maka, $|F(r_1)| = 3^1 = 3$

e. $r_x = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 4\ 3\ 2\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 3)$

Maka, $|F(r_1)| = 3^2 = 9$

f. $r_y = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 2\ 1\ 4\ 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$

Maka, $F|(r_1)| = 3^2 = 9$

g. $r_{d_1} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 4\ 3\ 2 \end{pmatrix} = (1)(2\ 4)(3)$

Maka, $|F(r_1)| = 3^3 = 27$

h. $r_{d_2} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 3\ 2\ 1\ 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2)(4)$

Maka, $|F(r_1)| = 3^3 = 27$

Sehingga diperoleh,

$$k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F(g)|$$

$= \frac{1}{8}[81 + 3 + 9 + 3 + 9 + 9 + 27 + 27]$

$= \frac{1}{8}[168]$

$= 21$

Dapat diperoleh kesimpulan bahwa terdapat dua puluh satu pewarnaan untuk mewarnai sudut persegi dengan tiga warna.

Dengan menggunakan Teorema Polya I

Pertama, akan diuraikan semua elemen dari grup Dehidral D_4 dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1: Elemen-elemen dari Grup Dihedral D_4

No.	D_4
1	$(1)(2)(3)(4)$
2	$(1\ 2\ 3\ 4)$
3	$(1\ 3)(2\ 4)$
4	$(1\ 4\ 3\ 2)$
5	$(1\ 4)(2\ 3)$
6	$(1\ 2)(3\ 4)$
7	$(1)(2\ 4)(3)$
8	$(1\ 3)(2)(4)$

Sehingga, indeks sikel dari D_4 adalah

$$Z(D_4) = \frac{1}{8}[1.{x_1}^4 + 3.{x_2}^2 + 2.{x_1}^2 x_2 + 2.x_4] \quad (2)$$

Pada persegi tersebut hanya terdapat tiga warna pada himpunan Y sehingga $r = 3$ maka menyebabkan $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 3$, dengan memasukkan nilai tersebut pada Persamaan (2) diperoleh :

$$Z(D_4) = \frac{1}{8}[1.3^4 + 3.3^2 + 2.3^2.3 + 2.3]$$

$$Z(D_4) = \frac{1}{8}[81 + 27 + 54 + 6]$$

$$Z(D_4) = \frac{1}{8}[168] = 21$$

4.3 Enumerasi Graf Sederhana Enam Simpul dengan Menggunakan Teorema Polya

Diberikan himpunan $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ yang merupakan himpunan simpul dari suatu graf dengan $n = 6$. Apabila n simpul pada graf dikenai permutasi maka pasangan simpul tak terurut dari graf tersebut juga mengalami permutasi. Pasangan simpul tak terurut dapat dipandang sebagai suatu sisi. Jika himpunan permutasi pada simpul-simpul suatu graf membentuk suatu graf simetri (S_n), seluruh bentuk grup S_n adalah $n! = 6! = 720$.

Selanjutnya dari elemen-elemen permutasi tersebut akan diperoleh tipe permutasi dan indeks sikel permutasi. Pola tipe-tipe rantai yang diperoleh sebagai berikut:

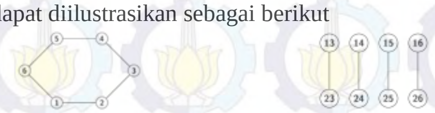
1. Bentuk [6,0,0,0,0,0] ada 1 dengan indeks sikelnya x_1^6
2. Bentuk [4,1,0,0,0,0] ada 15 dengan indeks sikelnya $x_1^4 x_2$
3. Bentuk [3,0,1,0,0,0] ada 40 dengan indeks sikelnya $x_1^3 x_3$
4. Bentuk [2,2,0,0,0,0] ada 45 dengan indeks sikelnya $x_1^2 x_2^2$
5. Bentuk [2,0,0,1,0,0] ada 90 dengan indeks sikelnya $x_1^2 x_4$
6. Bentuk [1,1,1,0,0,0] ada 120 dengan indeks sikelnya $x_1 x_2 x_3$
7. Bentuk [1,0,0,0,1,0] ada 144 dengan indeks sikelnya $x_1 x_5$

8. Bentuk [0,1,0,1,0,0] ada 90 dengan indeks sikelnya x_2x_4
9. Bentuk [0,0,2,0,0,0] ada 40 dengan indeks sikelnya x_3^2
10. Bentuk [0,3,0,0,0,0] ada 15 dengan indeks sikelnya x_2^3
11. Bentuk [0,0,0,0,0,1] ada 120 dengan indeks sikelnya x_6

Jika himpunan permutasi pada simpul-simpul suatu graf membentuk suatu grup simetri (S_n), maka permutasi dari pasangan terurut simpul tersebut juga membentuk suatu grup permutasi (R_n). Sehingga akan dibentuk indeks sikel R_n (permutasi sisi pada graf) dengan membangkitkan indeks sikel pada S_6 yang sudah diperoleh. Sebagai contoh,
B $= (12)$ dengan bentuk [4,1,0,0,0,0] dengan indeks sikel : $x_1^4x_2$

$$B' = \begin{pmatrix} 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 23\ 24\ 25\ 26\ 34\ 35\ 36\ 45\ 46\ 56 \\ 12\ 23\ 23\ 25\ 26\ 13\ 14\ 15\ 16\ 34\ 35\ 36\ 45\ 46\ 56 \end{pmatrix}$$

Dan dapat diilustrasikan sebagai berikut



(1 2) (13 23)(14 24)(15 25)(16 26)

Gamabar 4.2: Ilustrasi Perubahan Indeks Sikel

Keseluruhan perubahan indeks sikel S_6 menjadi indeks sikel R_6 dinyatakan dalam Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Perubahan Indeks Sikel

No.	S_n	R_n
1	x_1^6	x_1^{15}
2	$x_1^4x_2$	$x_1^7x_2^4$
3	$x_1^3x_3$	$x_1^3x_3^4$
4	$x_1^2x_2^2$	$x_1^3x_2^6$
5	$x_1^2x_4$	$x_1x_2x_4^3$
6	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3^2x_6$
7	x_1x_5	x_5^3
8	x_2x_4	$x_1x_2x_4^3$
9	x_3^2	x_3^5
10	x_2^3	$x_1^3x_2^6$
11	x_6	$x_3x_6^2$

Sehingga dengan menggunakan Teorema Polya I diperoleh :

$$Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{720}[x_1^{15} + 15x_1^7x_2^4 + 40x_1^3x_3^4 + 45x_1^3x_2^6 + 90x_1x_2x_4^3 + 120x_1x_2x_3^2x_6 + 144x_5^3 + 90x_1x_2x_4^3 + 40x_3^5 + 15x_1^3x_2^6 + 120x_3x_6^2 \quad (3)$$

Pada graf sederhana hanya terdapat dua keadaan pada himpunan Y, yaitu ada himpunan sisi pada himpunan simpul dan tidak ada sisi pada himpunan simpul, sehingga $r = 2$ maka menyebabkan $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 2$, dengan memasukkan nilai tersebut pada Persamaan (3) diperoleh :

$$Z(R_6; 2,2,2,2,2,2) = \frac{1}{720}[2^{15} + 15.2^7.2^4 + 40.2^3.2^4 + 45.2^3.2^6 + 90.2.2.2^3 + 120.2.2.2^2.2 + 144.2^3 + 90.2.2.2^3 + 40.2^5 + 15.2^3.2^6 + 120.2.2^2]$$

$$Z(R_6; 2,2,2,2,2,2) = \frac{1}{720}[32768 + 30720 + 5120 + 23040 + 2880 + 3840 + 1152 + 2880 + 1280 + 7680 + 960]$$

$$Z(R_6; 2,2,2,2,2,2) = \frac{1}{720}[112320] = 156$$

Jadi, untuk graf sederhana dengan enam simpul, maka akan terdapat 156 graf yang tidak saling isomorfis.

Ambil dua pola pada himpunan Y, misalkan $T =$ tidak mempunyai sisi dan $A =$ mempunyai sisi, kemudian substitusikan $x_1 = T + A, x_2 = T^2 + A^2, x_3 = T^3 + A^3, x_4 = T^4 + A^4, x_5 = T^5 + A^5danx_6 = T^6 + A^6$ pada Persamaan (3), sehingga diperoleh :

$$Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{720}[(T + A)^{15} + 15.(T + A)^7.(T^2 + A^2)^4 + 40.(T + A)^3.(T^3 + A^3)^4 + 45.(T + A)^3.(T^2 + A^2)^6 + 90.(T + A).(T^2 + A^2).(T^4 + A^4)^3 + 120.(T + A).(T^2 + A^2).(T^3 + A^3)^2.(T^6 + A^6) + 144.(T^5 + A^5)^3 + 90.(T + A).(T^2 + A^2).(T^4 + A^4)^3 + 40.(T^3 + A^3)^5 + 15.(T + A)^3.(T^2 + A^2)^6 + 120.(T^3 + A^3).(T^6 + A^6)^2]$$

Dilakukan perkalian pada setiap suku di ruas kanan kemudian disederhanakan sehingga diperoleh :

$$Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = T^{15} + T^{14}A + 2T^{13}A^2 + 5T^{12}A^3 + 9T^{11}A^4 + 15T^{10}A^5 + 21T^9A^6 + 24T^8A^7 + 24T^7A^8 + 21T^6A^9 + 15T^5A^{10} + 9T^4A^{11} + 5T^3A^{12} + 2T^2A^{13} + TA^{14} + A^{15} \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan (4) diperoleh bentuk-bentuk graf yang tidak isomorfis tesebut dengan rincian sebagai berikut :

1. Satu graf tanpa sisi
2. Satu graf dengan satu sisi
3. Dua graf dengan dua sisi
4. Lima graf dengan tiga sisi
5. Sembilan graf dengan empat sisi
6. Lima belas graf dengan lima sisi
7. Dua puluh satu graf dengan enam sisi
8. Dua puluh empat graf dengan tujuh sisi
9. Dua puluh empat graf dengan delapan sisi
10. Dua puluh satu graf dengan Sembilan sisi

11. Lima belas graf dengan sepuluh sisi
12. Sembilan graf dengan sebelas sisi
13. Lima graf dengan dua belas sisi
14. Dua graf dengan tiga belas sisi
15. Satu graf dengan empat belas sisi
16. Satu graf dengan lima belas sisi

V. PENUTUP

A. KESIMPULAN

1. Terdapat seratus lima puluh enam graf sederhana dengan enam simpul yang tidak saling isomorfis.

2. Terdapat dua puluh satu pewarnaan sudut persegi dengan tiga warna berbeda yang tidak saling isomorfis.

B. SARAN

Adapun saran dari penelitian ini adalah untuk enumerasi graf yang tidak isomorfis sebaiknya menggunakan graf yang tidak sederhana.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kleiner, I. (1986) *The Evolution of Group Theory: A Brief Survey*.Mathematics Magazine, Volume 59, No. 4, p.195-215.

[2] McWilliams,B., Donahue J. (2006) *Applications of Permutation Groups.* Abstract Algebra Lecture Note.

[3] Mahmudah, W. (2006). Kajian Indeks Sikel Polinomial Grup dan Aplikasi TeoremaPolya Pada Molekul Tetrahedron, Tugas Akhir Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

[4] Cattani M. (2007), *Quantum Statitics: The Industinguishability Principle and The Permutation Group Theory*, RevistaBrasileira de Ensino de Fisica, Volume 29, No.3, p.405-414.

[5] Fripertinger H. 1992. *Enumeration in Musical Theory*. Seminaire Lotharingien de Combinatoire, 476/S-26:2942.ISSN 0755-3390.

[6] Gunawan R., S.(2003) *Aplikasi TeoremaPolya Pada Enumerasi Graf Sederhana*. Jurnal Matematika dan Komputasi. 1(8):1 - 10.

[7] Rosalianti T. V., Suhery C., Kusumasti, N. (2013) *Penggunaan TeoremaPolya Dalam Menentukan Banyaknya Graf Sederhana yang Tidak Saling Isomorfis,* Buletin Ilmiah Mat.Stat. dan Terapannya. Volume 02, No.1 Hal 39-44.

[8] Khanna, Vijay K. (1993), *A Course in Abstarct Algebra* , Vikas Publishing House PVT LTD, New Delhi.

[9] Fraleigh, John B. 2002. *A First Course in Abstract Algebra, 7th Edition.* California: Addison Wesley Longman.

[10] D.H Smith, Jonathan. (2008), *Introduction to Abstract Algebra*, CRC Press, Iowa U.S.A.

[11] Mulholland Jamie,.*Permutation Puzzles: A Mathematical Perspective*. 16 Februari 2015. http://people.math.sfu.ca/~jtmulhol/math302/notes/22-Orbit-Stabilizer.pdf.

[12] Brualdi, Richard A.(2009) *Introductory Combinatoric*. New York: Pearson Education Inc.

[13] Diestel R. (1999) *Graph Theory*. New York: Springer-Verlag.

[14] Siang, J.J. (2002) *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*.Yogyakarta: ANDI.

Enumerasi Graf Sederhana dengan Enam Simpul Tidak Isomorfis Menggunakan Teorema Polya

Ahmad Jamil
1211 100 039

Pembimbing:
Soleha, S.Si, M.Si

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
2015

Latar Belakang

- Salah satu cabang dari ilmu aljabar adalah aljabar abstrak dan salah satu bidang yang dipelajari dalam ilmu aljabar abstrak adalah grup. Grup yang paling banyak dipelajari adalah grup permutasi.

Latar Belakang

- Salah satu cabang dari ilmu aljabar adalah aljabar abstrak dan salah satu bidang yang dipelajari dalam ilmu aljabar abstrak adalah grup. Grup yang paling banyak dipelajari adalah grup permutasi.
- Salah satu penggunaan konsep grup permutasi berhubungan dengan penyelesaian permasalahan enumerasi. Enumerasi merupakan permasalahan yang rumit karena permasalahan konseptual yaitu ketika objek berbeda dapat dipandang sama (isomorfis). Salah satu penyelesaian dalam masalah enumerasi adalah dengan menggunakan Teorema Polya.

Latar Belakang

- Salah satu cabang dari ilmu aljabar adalah aljabar abstrak dan salah satu bidang yang dipelajari dalam ilmu aljabar abstrak adalah grup. Grup yang paling banyak dipelajari adalah grup permutasi.
- Salah satu penggunaan konsep grup permutasi berhubungan dengan penyelesaian permasalahan enumerasi. Enumerasi merupakan permasalahan yang rumit karena permasalahan konseptual yaitu ketika objek berbeda dapat dipandang sama (isomorfis). Salah satu penyelesaian dalam masalah enumerasi adalah dengan menggunakan Teorema Polya.
- Dalam penelitian yang lain, Teorema Polya dapat digunakan dalam menentukan graf sederhana dengan empat simpul yang tidak saling isomorfis [1] dan lima simpul yang tidak saling isomorfis [2]. Oleh sebab itu, penelitian Tugas Akhir ini melanjutkan penentuan banyaknya graf sederhana dengan enam simpul yang tidak saling isomorfis.

Rumusan Masalah

- Bagaimana cara menentukan banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis dengan enam simpul ?

Rumusan Masalah

- Bagaimana cara menentukan banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis dengan enam simpul ?
- Bagaimana mendapatkan bentuk-bentuk dari graf sederhana yang tidak saling isomorfis dengan enam simpul ?

Batasan Masalah

Batasan masalah pada Tugas Akhir ini adalah Penghitungan untuk penentuan bentuk graf yang tidak saling isomorfis menggunakan software Maxima.

Tujuan dan Manfaat

Tujuan

Tujuan dan Manfaat

Tujuan

1. Menghitung banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis dengan enam simpul menggunakan Teorema Polya I.

Tujuan dan Manfaat

Tujuan

1. Menghitung banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis dengan enam simpul menggunakan Teorema Polya I.
2. Mengetahui bentuk-bentuk graf sederhana yang tidak saling isomorfis dengan enam simpul menggunakan Teorema Polya II.

Tujuan dan Manfaat

Tujuan

1. Menghitung banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis dengan enam simpul menggunakan Teorema Polya I.
2. Mengetahui bentuk-bentuk graf sederhana yang tidak saling isomorfis dengan enam simpul menggunakan Teorema Polya II.

Manfaat

Manfaat yang dapat diperoleh dari Tugas Akhir ini adalah memberikan informasi bagi pihak yang ingin mengembangkan dan melakukan penelitian tentang enumerasi graf yang tidak saling isomorfis.

[3] Jika $A \neq \emptyset$, untuk setiap fungsi $f : A \to A$ dan f bijektif maka f disebut permutasi dari A.

Jika terdapat $f : A \to A$ suatu permutasi, maka semua permutasi yang mungkin tersebut membentuk suatu grup permutasi. Grup tersebut dinamakan grup simetri dan dinotasikan dengan S_n.
[4] Jika A suatu himpunan, maka himpunan yang memuat semua permutasi dari A dinamakan grup simetri membentuk suatu grup simetri.

[3] Jika terdapat bilangan positif m sedemikian hingga $x, f(x), f^2(x), ..., f^{m-1}(x)$ semuanya berbeda dan $f^m(x) = x$, maka $(x\ f(x)\ f^2(x)...\ f^{m-1}(x))$ adalah sikel dengan panjang m.

Berikut ini adalah bentuk khusus dari sikel yang dinamakan transposisi.
[3] Transposisi adalah sikel dengan panjang dua.

Berikut ini akan diperkenalkan mengenai grup permutasi lainnya yang akan digunakan dalam pembahasan.
[3] Grup dihedral adalah subgrup dari S_n yang anggotanya merupakan himpunan semua permutasi yang bersesuaian dengan rotasi dan refleksi dari segi$-n$ beraturan dan grup dihedral memuat elemen sebanyak 2n.

[5] $Gx = \{g(x) \in X : g \in G\}$ yaitu himpunan semua peta $x \in X$ oleh permutasi g di G. Gx disebut orbit x terhadap G.
[5] $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$ adalah himpunan semua permutasi di G sedemikian hingga $g(x) = x$ dengan $g \in G$.
Dalam hal ini x disebut sebagai titik tetap dari g. Himpunan G_x disebut penstabil x di G.
[5] $F(g) = \{x \in X : g(x) = x\}$ adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi $g \in G$.

[5] Jika g adalah grup dan X adalah himpunan yang berhingga, maka grup Action φ kiri dari G pada X adalah fungsi:

$$\varphi : G \; x \; X \to X$$

yang memenuhi dua sifat:

(GA1) $(g * h) * x = g * (h * x); \forall g, h \in G$, dan $\forall x \in X$

(GA2) $e * x = x; \forall x \in X$ dengan e adalah elemen identitas dari grup G

Dalam hal ini, X disebut $G - set$

Indeks sikel dapat digunakan untuk enumerasi pola yang berhubungan dengan grup,karena dari indeks sikel dapat dihitung orbit dari setiap elemen dari grup permutasi.
[6] Diberikan G adalah grup permutasi dari suatu himpunan yang banyak anggotanya n dan $g \in G$ adalah komposisi dari sikel-sikel yang disjoint yang terdiri dari sikel dengan panjang 1 sebanyak a_1,sikel dengan panjang 2 sebanyak a_2,..., sikel dengan panjang n sebanyak a_n yang memenuhi $1a_1 + 2a_2 + ... + na_n = n$, maka indeks sikel g didefinisikan sebagai :

$$Z(g; x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} ... x_n^{a_n}$$

Sedangkan indeks sikel grup G didefinisikan sebagai berikut :
[6] Jika G adalah grup permutasi, maka indeks sikel dari grup permutasi G adalah

$$Z(G; x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Z(g; x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

[7] Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan dari simpul- simpul tidak kosong dan E adalah himpunan dari sisi-sisi yang menghubungkan dua simpul dan mungkin kosong. Sebuah Graf dikatakan sederhana jika graf tersebut tidak mempunyai sisi ganda maupun loop.
[8] Dua buah graf G_1 dan G_2 dengan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dikatakan isomorfis jika terdapat fungsi bijektif $f : V_1 \to V_2$ dengan sifat $\forall a, b \in V_1$ bertetangga jika dan hanya jika $f(a), f(b) \in V_2$ bertetangga, ,untuk setiap $a, b \in V_1$.

Metode Penelitian

Tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Metode Penelitian

Tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur
2. Menguraikan grup simetri S_6

Metode Penelitian

Tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur
2. Menguraikan grup simetri S_6
3. Mengelompokkan grup Simetri S_6 berdasarkan indeks sikelnya

Metode Penelitian

Tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur
2. Menguraikan grup simetri S_6
3. Mengelompokkan grup Simetri S_6 berdasarkan indeks sikelnya
4. Membentuk indeks sikel yang baru

Metode Penelitian

Tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur
2. Menguraikan grup simetri S_6
3. Mengelompokkan grup Simetri S_6 berdasarkan indeks sikelnya
4. Membentuk indeks sikel yang baru
5. Menghitung banyaknya graf

Metode Penelitian

Tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur
2. Menguraikan grup simetri S_6
3. Mengelompokkan grup Simetri S_6 berdasarkan indeks sikelnya
4. Membentuk indeks sikel yang baru
5. Menghitung banyaknya graf
6. Menentukan jenis graf yang tidak isomorfis

Metode Penelitian

Tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur
2. Menguraikan grup simetri S_6
3. Mengelompokkan grup Simetri S_6 berdasarkan indeks sikelnya
4. Membentuk indeks sikel yang baru
5. Menghitung banyaknya graf
6. Menentukan jenis graf yang tidak isomorfis
7. Menggambar jenis graf yang terbentuk

Metode Penelitian

Tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur
2. Menguraikan grup simetri S_6
3. Mengelompokkan grup Simetri S_6 berdasarkan indeks sikelnya
4. Membentuk indeks sikel yang baru
5. Menghitung banyaknya graf
6. Menentukan jenis graf yang tidak isomorfis
7. Menggambar jenis graf yang terbentuk
8. Menulis laporan Tugas Akhir

Pada bagian ini akan diberikan Teorema Burnside dan Teorema Polya. Teorema Burnside dapat digunakan untuk menghitung banyaknya pola yang tidak isomorfis berdasarkan banyaknya titik tetap permutasi dari suatu grup yang permutasi yang bertindak terhadap pola tersebut.

Teorema Burnside

Teorema Burnside [6] Misalkan X adalah G-set dengan G dan X berhingga. Jika n adalah banyaknya orbit di X pada G, maka:

$$n = \frac{1}{|G|} \Sigma_{g \in G} |F(g)| \tag{1}$$

Pada bagian ini akan dibahas tentang Teorema Polya I. Sama seperti Teorema Burnside, Teorema Polya I digunakan untuk menghitung banyaknya pola yang tidak isomorfis, namun dalam Teorema Polya I tidak diperlukan banyaknya orbit untuk menghitung pola tersebut, tetapi menggunakan indeks sikel dari grup yang bertindak terhadap pola tersebut.

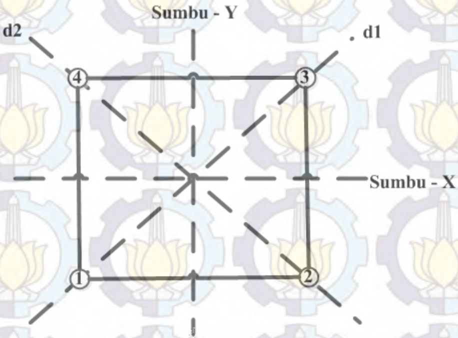
Teorema Polya I [6] Diberikan $C = \{f | f : X \to Y\}$ dengan $|X| = n \geq 2$ dan $|Y| = r$. Jika G merupakan grup permutasi yang beraksi pada X dengan indeks sikel $Z(G; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ maka banyaknya pola di C terhadap G adalah $Z(G; r, r, r, \ldots, r)$.

Pada bagian ini akan dibahas tentang Teorema Polya II,tidak seperti Teorema Burnside maupun Teorema Polya I, Teorema Polya II digunakan untuk bentuk pola yang tidak isomorfis yang diperoleh dari Teorema Polya I.

Teorema Polya II [6] Diberikan $C = \{f | f : X \to Y\}$ dengan $|X| = n \geq 2$ dan $|Y| = r$. Jika G merupakan grup permutasi yang beraksi pada X dengan indeks sikel $Z(G; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, maka maka Persediaan pola $PI(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ adalah merupakan indeks sikel dari $Z(G; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ dengan $x_i = y_1^i + y_2^i + \cdots + y_r^i$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Dalam Teorema Burnside, diperlukan orbit elemen dari masing-masing sikel grup untuk mementukan banyaknya pola yang mungkin, sedangkan dalam Teorema Polya I hanya memerlukan indeks sikel dari elemen-elemen grup untuk menghitung banyaknya pola.

Gambar: Segi-empat Beraturan Beserta Sumbu Refleksinya



Berapa banyak cara mewarnai sudut dari persegi dengan tiga warna ?

Menggunakan Teorema Burnside

Penyelesaian
Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep grup Dehidral D_4. Dari Persamaan (1) dan Gambar 1 akan dicari $F(g)$ atau titik tetap permutasi dari setiap elemen grup dehidral D_4. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ adalah $G - set$ dari grup dehidral D_4.

Menggunakan Teorema Burnside

Sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{1}{|D_4|}\sum_{g\in D_4}|F(g)| \\
&= \frac{1}{81}[81+3+9+3+9+9+27+27] \\
&= \frac{1}{8}[168] \\
&= 21
\end{aligned}
$$

Dapat diperoleh kesimpulan bahwa terdapat 21 pewarnaan untuk mewarnai sudut persegi dengan tiga warna.

Menggunakan Teorema Polya I

Dari Teorema Polya, akan dicari indeks dari grup dihedral D_4, Sehingga diperoleh:

$$Z(D_4) = \frac{1}{8}[x_1^4 + 3x_2^2 + 2x_1^2x_2 + 2x_4] \tag{2}$$

Lalu substitusikan nilai $x_1 = x_2 = x_4 = 3$ pada Persamaan (2) sehingga diperoleh:

Menggunakan Teorema Polya I

$$
\begin{aligned}
Z(D_4)(3,3,3,3) &= \frac{1}{8}[3^4 + 3.3^2 + 2.3^2.3 + 2.3] \\
Z(D_4)(3,3,3,3) &= \frac{1}{8}[81 + 27 + 54 + 6] \\
Z(D_4)(3,3,3,3) &= \frac{1}{8}[168] \\
Z(D_4)(3,3,3,3) &= 21
\end{aligned}
$$

Dapat diperoleh kesimpulan terdapat 21 pewarnaan dan hasil tersebut sesuai dengan hasil perhitungan dengan menggunakan Teorema Burnside.

Diberikan himpunan simpul $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang merupakan himpunan simpul dari suatu graf. Apabila 6 simpul pada graf tersebut dikenakan permutasi, maka pasangan simpul tak terurut graf tersebut juga mengalami permutasi dan himpunan permutasi pada simpul-simpul suatu graf membentuk suatu grup simetri S_6.
Selanjutnya dari elemen-elemen permutasi tersebut akan diperoleh tipe permutasi dan indeks sikel permutasi. Untuk grup simetri S_6, tipe permutasi dan indeks sikel dari grup simetri S_6 secara keseluruhan dapat ditampilkan dalam Tabel berikut:

No.	Tipe Permutasi	Indeks Sikel
1	[6,0,0,0,0,0]	x_1^6
2	[4,1,0,0,0,0]	$x_1^4 x_2$
3	[3,0,1,0,0,0]	$x_1^3 x_3$
4	[2,2,0,0,0,0]	$x_1^2 x_2^2$
5	[2,0,0,1,0,0]	$x_1^2 x_4$
6	[1,1,1,0,0,0]	$x_1 x_2 x_3$
7	[1,0,0,0,1,0]	$x_1 x_5$
8	[0,1,0,1,0,0]	$x_2 x_4$
9	[0,0,2,0,0,0]	x_3^2
10	[0,3,0,0,0,0]	x_2^3
11	[0,0,0,0,0,1]	x_6

Jika himpunan permutasi pada simpul-simpul suatu graf membentuk grup simetri S_6, maka permutasi dari pasangan terurut simpul akan membentuk grup permutasi R_6 dengan cara membangkitkan indeks sikel dari grup simetri S_6 dan tipe permutasi dan indeks sikel dari grup simetri R_6 secara keseluruhan dapat ditampilkan dalam Tabel berikut:

Tabel: Perubahan Indeks Sikel S_6 Menjadi Indeks Sikel R_6

No.	S_6	R_6
1	x_1^6	x_1^{15}
2	$x_1^4 x_2$	$x_1^7 x_2^4$
3	$x_1^3 x_3$	$x_1^3 x_3^4$
4	$x_1^2 x_2^2$	$x_1^3 x_2^6$
5	$x_1^2 x_4$	$x_1 x_2 x_4^3$
6	$x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3^2 x_6$
7	$x_1 x_5$	x_5^3
8	$x_2 x_4$	$x_1 x_2 x_4^3$
9	x_3^2	x_3^5
10	x_2^3	$x_1^3 x_2^6$
11	x_6	$x_3 x_6^2$

Sehingga dengan menggunakan teorema Polya I diperoleh:

$$\begin{aligned} Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = {} & \frac{1}{720}[x_1^{15} + 15x_1^7 x_2^4 + 40x_1^3 x_3^4 + \\ & 45x_1^3 x_2^6 + 90x_1 x_2 x_4^3 + \\ & 120x_1 x_2 x_3^2 x_6 + 144x_5^3 + \\ & 90x_1 x_2 x_4^3 + 40x_3^5 + 15x_1^3 x_2^6 \\ & +120x_3 x_6^2] \end{aligned} \tag{3}$$

Pada graf sederhana hanya terdapat dua keadaan pada himpunan Y, yaitu ada himpunan sisi pada himpunan simpul dan tidak ada sisi pada himpunan simpul, sehingga $r = 2$ maka menyebabkan $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 2$, dengan mensubstitusikan nilai tersebut pada Persamaan (4.3) diperoleh:

$$\begin{aligned} Z(R_6; 2,2,2,2,2,2) &= \frac{1}{720}[2^{15} + 15.2^7.2^4 + 40.2^3.2^4 + \\ &\quad 45.2^3.2^6 + 90.2.2.2^3 + 120.2.2.2^2.2 \\ &\quad +144.2^3 + 90.2.2.2^3 + 40.2^5 \\ &\quad +15.2^3.2^6 + 120.2.2^2] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z(R_6; 2,2,2,2,2,2) &= \frac{1}{720}[32768 + 30720 + 5120 + \\
&\quad 23040 + 2880 + 3840 + 1152 \\
&\quad +2880 + 1280 + 7680 \\
&\quad +960]
\end{aligned}
$$

$$
Z(R_6; 2,2,2,2,2,2) = \frac{1}{720}[112320] = 156
$$

Jadi untuk graf sederhana dengan enam simpul, maka akan terdapat 156 graf yang tidak saling isomorfis.

Ambil dua pola di himpunan Y, misalkan T = tidak mempunyai sisi dan A = mempunyai sisi, kemudian substitusikan nilai $x_1 = T + A, x_2 = T^2 + A^2, x_3 = T^3 + A^3, x_4 = T^4 + A^4, x_5 = T^5 + A^5, x_6 = T^6 + A^6$ pada Persamaan (4.3) sehingga diperoleh:

$Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

$$\begin{aligned} = \quad & \frac{1}{720}[(T+A)^{15} + 15(T+A)^7(T^2+A^2)^4 + 40(T+A)^3 \\ & (T^3+A^3)^4 + 45(T+A)^3(T^2+A^2)^6 + 90(T+A) \\ & (T^2+A^2)(T^4+A^4)^3 + 120(T+A)(T^2+A^2)(T^3+A^3)^2 \\ & (T^6+A^6) + 144(T^5+A^5)^3 + 90(T+A)(T^2+A^2) \\ & (T^4+A^4)^3 + 40(T^3+A^3)^5 + 15(T+A)^3(T^2+A^2)^6 \\ & +120(T^3+A^3)(T^6+A^6)^2] \qquad (4) \end{aligned}$$

dilakukan perkalian pada setiap suku di ruas kanan pada Persamaan (4.4) kemudian disederhanakan sehingga diperoleh:

$$Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = T^{15} + T^{14}A + 2T^{13}A^2 + 5T^{12} A^3 + 9T^{11}A^4 + 15T^{10}A^5 + 21T^9A^6 + 24T^8A^7 + 24T^7A^8 + 21T^6A^9 + 15T^5A^{10} + 9T^4A^{11} + 5T^3A^{12} + 2T^2A^{13} + TA^{14} + A^{15}] \quad (5)$$

Dari Persamaan (4.5) dapat disimpulkan bahwa terdapat 156 graf sederhana enam simpul yang tidak isomorfis dengan rincian sebagai berikut:

1. satu graf tanpa sisi
2. satu graf dengan satu sisi
3. dua graf dengan dua sisi
4. lima graf dengan tiga sisi
5. sembilan graf dengan empat sisi
6. lima belas graf dengan lima sisi
7. dua puluh satu graf dengan enam sisi
8. dua puluh empat graf dengan tujuh sisi
9. dua puluh empat graf dengan delapan sisi
10. dua puluh satu graf dengan sembilan sisi
11. lima belas graf dengan sepuluh sisi
12. sembilan graf dengan sebelas sisi
13. lima graf dengan dua belas sisi
14. dua graf dengan tiga belas sisi
15. satu graf dengan empat belas sisi
16. satu graf dengan lima belas sisi

Kesimpulan

a. Enumerasi dengan menggunakan Teorema Polya I dan Teorema Polya II diperoleh 156 graf sederhana dengan enam simpul yang tidak saling isomorfis.

b. Bentuk-bentuk dari 156 graf yang tidak isomorfis tersebut yaitu satu graf tanpa sisi, satu graf dengan satu sisi, dua graf dengan dua sisi, lima graf dengan tiga sisi, sembilan graf dengan empat sisi, lima belas graf dengan lima sisi, dua puluh satu graf dengan enam sisi, dua puluh empat graf dengan tujuh sisi, dua puluh empat graf dengan delapan sisi, dua puluh satu graf dengan sembilan sisi, lima belas graf dengan sepuluh sisi, sembilan graf dengan sebelas sisi, lima graf dengan dua belas sisi, dua graf dengan tiga belas sisi, satu graf dengan empat belas sisi dan satu graf dengan lima belas sisi.

Saran

Adapun saran dari Tugas Akhir ini adalah untuk enumerasi graf yang tidak isomorfis, sebaiknya menggunakan graf yang tidak sederhana (graf yang mempunyai loop dan $n - graf$, untuk $n \geq 2$).

Daftar Pustaka

Gunawan R., S.2003. *Aplikasi Teorema Polya Pada Enumerasi Graf Sederhana*. Jurnal Matematika dan Komputasi. 1(8):1 - 10.

Rosalianti T. V., Suhery C., Kusumasti, N.2013. *Penggunaan Teorema Polya Dalam Menentukan Banyaknya Graf Sederhana yang Tidak Saling Isomorfis*. Buletin Ilmiah Mat.Stat. dan Terapannya. Volume 02, No.1 Hal 39-44.

Khanna, Vijay K.1993.*A Course in Abstract Algebra*. Vikas Publishing House PVT LTD, New Delhi.

Fraleigh, John B.2002. *A First Course in Abstract Algebra*, 7th Edition. California: Addison Wesley Longman.

Mulholland, Jamie.2015. diakses pada tanggal 16 Februari 2015. *Permutation Puzzles: A Mathematical Perspective*. http://people.math.sfu.ca/ jtmulhol/math302/notes/22-Orbit-Stabilizer.pdf.

Brualdi, Richard A.2009. *Introductory Combinatoric*. New York: Pearson Education Inc.

Diestel R.1999. *Graph Theory*. New York: Springer- Verlag.

Siang, J.J. 2002.*Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: ANDI